Università di Pisa

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Misure di Plancherel associate a sub-laplaciani su Gruppi di Lie

Tesi di Laurea Magistrale

Candidato
Leonardo Tolomeo

Relatore
Prof. **Fulvio Ricci**

Controrelatore
Dott. **Nicola Visciglia**

Anno accademico 2014/2015

Misure di Plancherel associate a sub-laplaciani su gruppi di Lie

Leonardo Tolomeo

17 luglio 2015

Indice

Introduzione

Sia G un gruppo di Lie, e sia $\mathrm{d}x$ una misura di Haar su G. Per $A \subseteq G$ misurabile, indichiamo con $|A|$ la sua misura di Haar. Nel corso della tesi, assumeremo che G sia a crescita polinomiale, cioè che esista un intorno compatto U dell'identità sul gruppo tale che $|U^n| \sim n^D$ per $n \to \infty$.
Siano $X_1, \dots, X_n$ dei campi invarianti a sinistra che soddisfino la condizione di Hörmander, cioè tali che l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G è generata dai loro commutatori iterati $[X_1, [\dots, X_n] \dots]]$. Allora esistono una distanza sul gruppo invariante a sinistra compatibile con la topologia di gruppo e un numero intero d tali che $|B(e,r)| \sim r^d$ per $r < 1$ e $|B(e,R)| \sim r^D$ per $r > 1$. Questa struttura consente di definire in modo intrinseco lo spazio di Schwartz $S(G)$.
Consideriamo il sublaplaciano $\mathscr{L} = -(X_1^2 + \dots + X_n^2)$. Poiché i campi soddisfano la condizione di Hörmander, questo operatore è ipoellittico ed è essenzialmente autoaggiunto sul dominio $C_c^\infty \subseteq L^2(G)$. Sia E_λ la risoluzione dell'identità associata, in modo che

$$\mathscr{L} = \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

Attraverso questa decomposizione spettrale è possibile definire altri operatori attraverso un moltiplicatore $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, ponendo

$$f(\mathscr{L}) := \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda.$$

Poiché l'operatore $f(\mathscr{L})$ è invariante a sinistra, con ipotesi relativamente blande su f, attraverso il Teorema del Nucleo di Schwartz è possibile trovare una distribuzione $\check{f}$ per cui $f(\mathscr{L})\phi = \phi * \check{f}$ per ogni $\phi \in C_c^\infty$. Uno dei risultati principali di questa tesi è il seguente (che estende un risultato di M. Christ per gruppi stratificati in [2]):

Teorema 1. *Esiste un'unica misura di Radon μ su $\mathbb{R}^+$ tale che $\check{f} \in L^2(G) \iff f \in L^2(\mu)$ e*

$$\|\check{f}\|^2_{L^2(G)} = \int_{\mathbb{R}^+} |f^2|(\lambda) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Inoltre, questa misura soddisfa

$$\mu([0,b]) \leqslant \begin{cases} Cb^{\frac{D}{2}} \text{ per } b \leqslant 1 \\ Cb^{\frac{d}{2}} \text{ per } b > 1 \end{cases} .$$

L'esistenza di questa misura consente di ricavare formule per la mappa $^\vee : L^2(\mu) \to L^2(G)$ e delle estensioni di questa mappa a $^\vee : L^1(\mu) \to L^\infty(G)$. Il risultato a cui sia arriva in questo senso è il seguente:

Teorema 2. *La mappa* $^\vee : L^1 \cap L^2 \to C_0$ *si estende ad un unico operatore lineare continuo di norma* 1 $^\vee : L^1(\mu) \to C_0(G)$. *Questa estensione si scrive come*

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda)K(\lambda, x)\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

per un'unica funzione $K \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times G)$ *con* $\|K\|_\infty = 1$. *Chiamando inoltre* $\widehat{\ }$: $L^2(G) \to L^2(\mu)$ *l'aggiunta della mappa* $^\vee$, *si ha che* $\widehat{\ }: L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\mu)$ *si estende in modo unico ad una mappa continua* $\widehat{\ }: L^1(G) \to L^\infty(\mu)$ *tale che*

$$\widehat{\phi}(\lambda) = \int_G \phi(x)K(\lambda, x)\mathrm{d}x.$$

Sul nucleo K dato da questo Teorema si ricavano le seguenti informazioni:

Teorema 3. *Il nucleo* K *è una funzione reale, con* $K(\lambda, x) = K(\lambda, x^{-1})$, *analitica nella variabile* x *con tutte le derivate limitate, per la quale valgono le seguenti formule (per ogni* x *e per* μ*-quasi ogni* λ*):*

$$K(\lambda, e) \equiv 1$$

$$\mathscr{L}K(\lambda, x) = \lambda K(\lambda, x)$$

$$\check{f} * K(\lambda, \cdot) = K(\lambda, \cdot) * \check{f} = f(\lambda)K(\lambda, \cdot)$$

per ogni f *tale che* $\check{f} \in L^1(G)$.
Inoltre, ponendo $K(0, x) \equiv 1$, *si ha che* $K(\cdot, x)$ *è essenzialmente continua in* 0 *nella topologia di* $C^\infty(G)$.

Il capitolo di risultati generali si conclude con il seguente Teorema:

Teorema 4. *Per* $k > \frac{1}{2}$, *la mappa* $^\vee$ *manda lo spazio di Sobolev* $H^k([0, b))$ *nello spazio delle funzioni* $\{\phi | |x|^\alpha T\phi \in L^2(G)\}$ *per* $\alpha < k - \frac{1}{2}$ *e per ogni* T *operatore differenziale invariante a sinistra, con norma operatoriale controllata da un polinomio in* b. *Di conseguenza, si ha che lo spazio di Schwartz* $S(\mathbb{R}^+)$ *ha immagine nello spazio* $S(G)$.

Nel capitolo successivo, si analizzano una serie di esempi di gruppi su cui si riescono a fare dei conti espliciti per la misura μ e per il nucleo K. In particolare, gli esempi suggeriscono una regolarità della funzione μ e del nucleo K rispetto a λ (almeno $\frac{D}{2}$) maggiori di quello che si riesce a dimostrare nel capitolo di risultati generali. La regolarità di K in λ è anche suggerita dalla sua continuità in $\lambda = 0$ e dalla stima $\mu([0, b]) \lesssim b^{\frac{D}{2}}$ per $b < 1$.
Tutto questo propone possibili sviluppi futuri su questo argomento.

Capitolo 1

Risultati preliminari

Nel corso di questa tesi, G indicherà un gruppo di Lie, dx la sua misura di Haar sinistra, $|S|$ la misura di Haar di $S \subseteq G$ boreliano, e $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Dove non specificato, G sarà non compatto e connesso.

1.1 Sublaplaciani su gruppi di Lie

Definizione 1.1. *Un subplaciano su un gruppo di Lie G è un'operatore differenziale Δ invariante a sinistra che si può scrivere come*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{k} X_j^2$$

per degli opportuni $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ che generano l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.2. *Si dice che i campi $X_1, \ldots, X_n$ soddisfano la* condizione di Hörmander *se la sottoalgebra generata da $X_1, \cdots, X_n$ coincide con $\mathfrak{g}$, cioè se i campi $[X_{i_1}, [\ldots [X_{i_k}, X_{i_{k+1}}] \ldots]$ generano l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.*

Hörmander ha dimostrato il seguente teorema ([6]):

Teorema 1.3. *Siano $X_1, \ldots X_n$ campi che soddisfano la condizione di Hörmander. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\alpha > 0$ e per ogni Ω aperto regolare relativamente compatto, l'equazione*

$$\Delta u = f$$

ha tutte le soluzioni $u \in H^{\alpha+\varepsilon}(\Omega)$ per ogni $f \in H^{\alpha}(\Omega)$.

Corollario 1.4. *Siano $X_1, \ldots, X_n$ campi che soddisfano la condizione di Hörmander. Allora l'operatore Δ è ipoellittico.*

Ogni Sublaplaciano si può estendere ad un operatore autoaggiunto (non limitato) su $L^2(G)$ in modo canonico, sulla base del seguente Teorema:

Teorema 1.5. *$\Delta : C_c^\infty \subset L^2 \to L^2$ è essenzialmente autoaggiunto.*

Dimostrazione. Poiché Δ è un operatore negativo, basta dimostrare che $\Delta - \mathrm{Id}$ ha immagine densa in L^2. Sia quindi $g \in \overline{(\Delta - \mathrm{Id})(C_c^\infty)}^\perp$. Allora $\langle (\Delta - \mathrm{Id})f, g\rangle = 0$ per ogni $f \in C_c^\infty$, per cui $\Delta g = g$ in senso distribuzionale. Poiché Δ è ipoellittico, allora $g \in C^\infty$ e $\Delta g = g$ in senso classico. Ma allora, se $\phi \in C_c^\infty$, $\Delta(\varphi * g) = \varphi * \Delta g = \varphi * g$. Di conseguenza, prendendo $\varphi_n \in C_c^\infty$ che tenda a g^* in L^2, risulta che

$$\Delta(g^* * g) = \lim_{\mathscr{D}'} \Delta(\varphi_n * g) = \lim_{\mathscr{D}'} (\varphi_n * g) = \lim_{L^1} (\varphi_n * g) = \left(\lim_{L^2} \varphi_n\right) * g = g^* * g,$$

per cui l'uguaglianza vale ovunque in senso classico. Ma $g^* * g$ è di tipo positivo, quindi

$$\max \Re(g^* * g) = g^* * g(e) = \|g\|_{L^2}^2 .$$

Ma quindi $\Delta(g^* * g(e)) = 0$, e quindi $\|g\|_{L^2} = 0$, cioè $g = 0$. □

Ad un particolare sublaplaciano (o, più precisamente, ad un insieme di campi che soddisfino la condizione di Hörmander), è possibile associare una metrica subriemanniana invariante a sinistra sul gruppo:

Definizione 1.6. *La distanza di Carnot-Caratheodory associata ai campi $X_1, \ldots, X_n$ è una distanza definita sul gruppo tale che*

$$d(x, y) := \inf_{\substack{\gamma \in \mathbb{C}^\infty((0,1)) \\ \dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2 \mathrm{d}t} \right\}.$$

Se i campi soddisfano la condizione di Hörmander, allora

- *$d(x, y)$ è finita per ogni $x, y \in G$,*
- *la topologia indotta da d su G coincide con la topologia standard di G,*
- *d è invariante a sinistra: $d(zx, zy) = d(x, y)$ per ogni $x, y, z \in G$*
- *per una qualsiasi metrica Riemanniana g sul gruppo invariante a sinistra tale che $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, indicando con d_g la metrica indotta da g, si ha che $d(x, y) \geqslant d_g(x, y)$.*

Fissata una distanza d di Carnot - Caratheodory sul gruppo, indichiamo con $|x| := d(e, x)$. Inoltre, $B_r(x)$ e $B(x, r)$ indicheranno la palla di raggio r e centro x, e B_r indicherà la palla di raggio r e centro e. Si ha che

$$B_{nr} = (B_r)^n.$$

Dimostrazione. Presentiamo una traccia della dimostrazione, il dettagli si possono trovare in [10].
Il quarto punto (il confronto con una metrica Riemanniana) è chiaramente vero, in quanto per definizione

$$d_g(x, y) := \inf_{\substack{\gamma \in \mathbb{C}^\infty((0,1)) \\ \gamma(0)=x, \gamma(1)=y}} \left\{ \int_0^1 |\dot{\gamma}| \mathrm{d}t \right\}$$

e per $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) X_i$ le quantità $\sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2}$ e $|\dot{\gamma}|$ coincidono. Di conseguenza, l'indentità $i : (G, d) \to (G, d_g)$ è una mappa continua.
L'invarianza a sinistra è altrettanto chiara, in quanto $\forall g \in G$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ (identificando il tangente a un punto di G con i campi vettoriali invariati a sinistra).
Per quanto riguarda la finitezza di d, per l'invarianza a sinistra vale che se $d(e, \cdot)$ è finita su U, allora $d(e, \cdot)$ è finita su U^n per ogni n (per avere una curva γ da e a xy, è sufficiente incollare una curva γ_1 da e a x e $x\gamma_2$, con γ_2 curva da e a y). Dunque, per la connessione di G, basta dimostrare che γ è finita su un intorno U di e.
Chiaramente la distanza d è finita su $\exp(\mathrm{Span}(X_1, \dots, X_n))$. Inoltre, poiché $d(xy, e) \leqslant d(x, e) + d(y, e)$, d è finita sul gruppo generato da $\exp(\mathrm{Span}(X_1, \dots, X_n))$. Si consideri dunque la mappa

$$\psi : V := \mathrm{Span}(X_1, \dots, X_n)^N \to G, \quad \psi(Y_1, \dots, Y_N) = \exp(Y_1) \cdots \exp(Y_N)$$

Chiaramente $\exp(tX_i) = \psi(tX_i, 0, \dots, 0)$, per cui $V \subseteq R := \psi(V^N)$. Sia quindi $Y \in R$, e sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ una curva con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(\sigma(t))\big|_{t=0} = Y$. Dato che

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(sX)\sigma(t) \exp(-sX) = \mathrm{Ad}(sX)Y,$$

si ha che $\mathrm{Ad}(sX)Y \in R$ per ogni $X \in V$. Poiché R è uno spazio vettoriale, questo implica che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Ad}(sX)Y = [X, Y] \in R$, da cui si ottiene che, per N abbastanza grande, $[V, R] \subseteq R$. Di conseguenza, per la condizione di Hörmander, si ha che per N abbastanza grande, $\mathrm{d}\psi(0, \dots, 0)$ è suriettivo su $\mathfrak{g}$, quindi esiste un intorno U di e tale che $U \subseteq \psi(V^N)$. Di conseguenza, d è finita su tutto G.
Inoltre, dalla formula

$$\exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) \exp(-tY) = \exp(t^2 [X, Y] + O(t^3)),$$

si può ottenere che $d(e,x) \lesssim d_g(e,x)^{1/N}$ per $|x| < 1$, da cui segue l'equivalenza delle topologie.
Infine, per quanto riguarda la proprietà $B_{nr} = B_r^n$, supponiamo per semplicità che r sia 1. Per le palle aperte si ha che:

- Se $x \in B_n$, allora esiste una curva γ con $\dot\gamma \in \mathrm{Span}(X_1, \ldots, X_n)$ e $\int |\dot\gamma| < n$. Riparametrizzando γ per lunghezza d'arco, si ha che $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$ e che
$$x = \gamma(|x|) = \left(\prod_{k=1}^{n} \gamma\left(\frac{(k-1)|x|}{n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{k|x|}{n}\right)\right).$$
Inoltre, per invarianza a sinistra,
$$d\left(\gamma\left(\frac{(k-1)|x|}{n}\right)^{-1} \gamma\left(\frac{k|x|}{n}\right), e\right) =$$
$$d\left(\gamma\left(\frac{(k-1)|x|}{n}\right)^{-1}, \gamma\left(\frac{k|x|}{n}\right)\right) < 1,$$
quindi $x \in B_1^n$.

- Se $x = x_1 \cdots x_n \in B_1^n$, con $x_i \in B_1$, allora si ha che, per invarianza a sinistra, $d(x_1 \cdots x_k, x_1 \cdots x_k x_{k+1}) = d(e, x_{k+1})$, per cui, per la disuguaglianza triangolare, $d(x,e) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(x_k, e) < n$.

La dimostrazione per le palle chiuse è analoga. □

1.2 Gruppi di Lie a crescita polinomiale

Definizione 1.7. *Sia G un gruppo di Lie connesso e sia $\mathrm{d}x$ la sua misura di Haar sinistra. Allora G si dice* a crescita polinomiale *se per ogni U intorno compatto dell'identità e esistono delle costanti $C, c > 0$ tali che $|U^n| \leqslant Cn^c$.*

Proposizione 1.8. *Se esiste un intorno dell'identità V aperto tale che $|V^n| \leqslant Cn^c$, allora per ogni U compatto esiste una costante C_U tale che $|U|^n \leqslant C_U n^c$. Di conseguenza, il gruppo G è a crescita polinomiale.*

Dimostrazione. Senza perdere generalità, posso supporre V connesso. Poiché $1 \in V$, $\bigcup_{k=1}^{n} V^k = V^n$. Poiché inoltre $V^\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k$ è un sottogruppo connesso di G, allora $V^\infty = G$. Quindi se U è un insieme compatto, allora esiste k tale che $V^k \supseteq U$. Quindi $|U^n| \leqslant |V^{kn}| \leqslant Ck^c n^c$. □

Teorema 1.9. *Sia G un gruppo di Lie a crescita polinomiale. Allora è unimodulare.*

Dimostrazione. Indichiamo con δ la funzione modulare su G. Sia per assurdo $g_0 \in G$ tale che $\delta(g_0) > 1$. Sia U un intorno compatto dell'identità tale che $g_0 \in \mathring{U}$ (ad esempio, $g_0 V \cup V$, con V intorno compatto di e). Allora $U^n \supseteq U g_0^{n-1}$ e quindi, essendo $|U g_0^{n-1}| = |U|\Delta(g_0^{n-1})$,

$$|U^n| \geqslant |U|\delta(g_0^{n-1}) = |U|\delta(g_0)^{n-1}$$

che è definitivamente maggiore di Cn^c $\forall C, c \in \mathbb{R}$, assurdo. $\square$

Fissiamo adesso dei campi $X_1, \ldots, X_n$ che soddisfino la condizione di Hörmander, e indichiamo con d la distanza di Carnot-Caratheodory associata. Indichiamo con Δ sia l'operatore differenziale $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ che l'operatore autoaggiunto associato, e in entrambi questi casi sia $\mathscr{L} := -\Delta$.
Vale il seguente teorema ([4]):

Teorema 1.10. *Sia G un gruppo a crescita polinomiale, e siano $X_1, \ldots, X_n$ una famiglia di campi che soddisfa la condizione di Hörmander. Allora esistono due numeri interi d, D e due costanti c, C tali che*

$$cr^d \leqslant |B_r| \leqslant Cr^d \text{ per } r < 1, \qquad cr^D \leqslant |B_r| \leqslant Cr^D \text{ per } r > 1.$$

d sarà chiamata dimensione in 0 *di G, e D sarà chiamata* dimensione all'infinito *di G.*

In realtà, D è indipendente dalla particolare scelta dei campi. Si ha infatti che:

Proposizione 1.11. *Sia U un intorno compatto di e, e sia D la dimensione all'infinito del gruppo G relativa a una famiglia di campi $X_1, \ldots, X_n$ che soddisfi la condizione di Hörmander. Allora D è l'unico numero reale tale che $cn^D \leqslant |U|^n \leqslant Cn^D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Siano $r, R \in \mathbb{R}$ tali che $B_r \subseteq U \subseteq B_R$. Allora

$$cr^D n^D \leqslant |B_{nr}| = |B_r^n| \leqslant |U|^n \leqslant |B_R^n| \leqslant |B_{Rn}| \leqslant CR^D n^D.$$

Inoltre, un numero D con questa proprietà è chiaramente unico, da cui segue la tesi. $\square$

Questa proprietà ci consente di definire lo spazio di Schwartz $S(G)$ in modo intrinseco, indipendente dai campi. Infatti:

Definizione 1.12. *Sia U un qualsiasi intorno compatto di e, e sia $|x|_U := \min\{n | x \in U^n\}$. Allora lo spazio di Schwartz $S(G)$ è dato dalle funzioni f in $C^\infty(G)$ tali che $|x|_U^\alpha Tf(x) \to 0$ per $x \to \infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni T operatore differenziale invariante a sinistra. Questa definizione è indipendente da U. Inoltre si ha che per ogni scelta di campi $X_1, \ldots, X_n$ che soddisfino la condizione di Hörmander, $c|x| \leqslant |x|_U \leqslant C|x|$ per $|x| > 1$.*

Dimostrazione. Per l'indipendenza da U, basta dimostrare che per ogni U, V intorni compatti di e, $|x|_U \leqslant C|x|_V$ per $x \to \infty$. Poiché U è un intorno di e e G è connesso, $\bigcup_n U^n$ ricopre G (in quanto è un sottogruppo aperto di G) e $U^n \subseteq U^m$ per $n \leqslant m$. Di conseguenza, esiste k tale che $V \subseteq U^k$, per cui $k|x|_U \leqslant |x|_V$. Inoltre, scegliendo $V = \overline{B_1}$, questo dimostra il confronto fra $|x|$ e $|x|_U$. □

Indichiamo con p_t il nucleo associato all'operatore $e^{-t\mathscr{L}}$. Questo nucleo sarà detto nucleo del calore. Vale il seguente teorema ([10]):

Teorema 1.13. *Il nucleo del calore p_t è una funzione reale positiva pari, C^∞, con $\int_G p_t = 1$, che soddisfa le seguenti stime puntuali:*

$$\begin{cases} p_t(x) & \leqslant & Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-c\frac{|x|^2}{t}\right) & \text{per } t < 1 \\ p_t(x) & \leqslant & Ct^{-\frac{D}{2}} \exp\left(-c\frac{|x|^2}{t}\right) & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

per alcune costanti C, c.
Analogamente, se T è un polinomio nelle variabili $X_1, \ldots, X_n$ di grado r, esistono costanti C_T, c_T tali che

$$\begin{cases} |Tp_t(x)| & \leqslant & C_T t^{-\frac{d}{2}-\frac{r}{2}} \exp\left(-c_T\frac{|x|^2}{t}\right) & \text{per } t < 1 \\ |Tp_t(x)| & \leqslant & C_T t^{-\frac{D}{2}-\frac{r}{2}} \exp\left(-c_T\frac{|x|^2}{t}\right) & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

Le stime puntuali appena riportate consentono di ricavare delle utili stime L^p:

Teorema 1.14. *Il nucleo del calore p_t è in L^p per ogni $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ e esiste una costante C tale che*

$$\begin{cases} \|p_t\|_{L^p} & \leqslant & Ct^{-\frac{d}{2p'}} & \text{per } t < 1 \\ \|p_t\|_{L^p} & \leqslant & Ct^{-\frac{D}{2p'}} & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

Analogamente, per ogni operatore differenziale T invariante a sinistra di grado r, esiste una costante C_T tale che

$$\begin{cases} \|Tp_t\|_{L^p} & \leqslant & C_T t^{-\frac{d}{2p'}-\frac{r}{2}} & \text{per } t < 1 \\ \|Tp_t\|_{L^p} & \leqslant & C_T t^{-\frac{D}{2p'}-\frac{r}{2}} & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $A_n(t) := \left\{x \in G \middle| n \leqslant \frac{|x|^2}{t} \leqslant n+1\right\}$. Allora, usando le stime del Teorema 1.14, si ha che, per $t \leqslant 1$, indicando con C una generica costante,

$$\|p_t\|_{L^p}^p = \int_{B(\sqrt{t})} {p_t}^p + \sum_{n\geqslant 1} \int_{A_n} {p_t}^p \leqslant$$

$$\leqslant C^p t^{-\frac{pd}{2}} t^{\frac{d}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} C^p t^{-\frac{pd}{2}} e^{-pcn} \left|B(\sqrt{t(n+1)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant C^p t^{-\frac{(p-1)d}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} C^p t^{-\frac{pd}{2}} t^{\frac{d}{2}} e^{-pcn} n^{\frac{\max(d,D)}{2}} \leqslant C^p t^{-\frac{d(p-1)}{2}},$$

da cui $\|p_t\|_{L^p}^p \leqslant Ct^{-\frac{d}{2p'}}$.
Analogamente, per $t \geqslant 1$, definendo $C_n := \left\{x \in G \middle| 2^n \leqslant \frac{|x|^2}{t} \leqslant 2^{n+1}\right\}$,

$$\|p_t\|_{L^p}^p = \sum_{n\in\mathcal{Z}} \int_{C_n} {p_t}^p \leqslant \sum_{n\geqslant -\log_2 t} \int_{C_n} {p_t}^p + \int_{B(1)} {p_t}^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant -\log_2 t} C^p t^{-\frac{pD}{2}} e^{-pc2^n} \left|B(\sqrt{t}2^{\frac{n+1}{2}})\right| + C^p t^{-\frac{pD}{2}} |B(1)|$$

$$\left(C^p 2^{\frac{D}{2}} \sum_{n\in\mathcal{Z}} e^{-pc2^n} 2^{\frac{Dn}{2}}\right) t^{-\frac{(p-1)D}{2}} + C^p t^{-\frac{pD}{2}}$$

Ma poiché

$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} e^{-pc2^n} 2^{\frac{Dn}{2}} = \sum_{n\leqslant 0} e^{-pc2^n} 2^{\frac{Dn}{2}} + \sum_{n>0} e^{-pc2^n} 2^{\frac{Dn}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant 0} 2^{Dn} 2 + \sum_{n>1} e^{-pcn} n^{\frac{D}{2}} \leqslant C,$$

segue la tesi.
Il conto per le norme L^p di Tp_t è formalmente identico, in quanto si sono usate solo le stime puntuali del nucleo del calore. □

A loro volta, le stime puntali e le stime L^p sul nucleo del calore da sole consentono di ricavare informazioni molto utili sull'operatore $\mathscr{L}$, come si vedrà nei prossimi capitoli. Un risultato basilare ma importante, che dipende fortemente dalla non compattezza del gruppo G, è il seguente:

Teorema 1.15. *$\mathscr{L}$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathrm{Ker}(\mathscr{L})$. Allora $e^{-t\mathscr{L}} f = f$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, e quindi $f * p_t = f$.
Sia $\phi \in C_c^\infty$ tale che $\|\phi - f\|_{L^2} < \varepsilon$. Allora, dato che $\left\|e^{-t\mathscr{L}}\right\|_{L^2 \to L^2} = 1$, si ha che $\|(f - \phi) * p_t\|_{L^2} < \varepsilon$. Inoltre, poiché $f * p_t = f$, $(f - \phi) * p_t = f - \phi * p_t$. Poiché G è non compatto, $D > 0$, per cui per le stime L^p sul nucleo del calore, $\lim_{t\to+\infty} \|p_t\|_{L^2} = 0$, e di conseguenza $\lim_{t\to+\infty} \|\phi * p_t\|_{L^2} = 0$. Per cui si deve avere che

$$\|f\|_{L^2} = \lim_{t\to+\infty} \|f - \phi * p_t\|_{L^2} = \lim_{t\to+\infty} \|(f - \phi) * p_t\|_{L^2} \leqslant \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, questo implica che $f \equiv 0$. □

Nei prossimi capitoli, oltre al nucleo del calore, sarà utile fare riferimento anche ai nuclei relativi all'equazione delle onde. Il risultato più importante è il seguente:

Teorema 1.16. *L'equazione delle onde*

$$\begin{cases} u_{tt} & = & \Delta u \\ u(0,\cdot) & = & u_0 \\ u_t(0,\cdot) & = & v_0 \end{cases}$$

con $u_0, v_0 \in L^2$ ha soluzione in L^2

$$u = \cos\left(t\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) u_0 + \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) v_0$$

e i nuclei associati agli operatori $\cos\left(t\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)$, $\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)$ hanno supporto su $\overline{B_t}$.

Dimostrazione. Si veda [7]. □

Infine, enunciamo un risultato che sarà utile nel seguito:

Teorema 1.17. *Sia μ una misura Borel regolare su $\mathbb{R}^n$, finita sui compatti. Sia f μ-localmente integrabile. Allora*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int_{B_\delta} |f(\gamma) - f(\lambda)| \, \mathrm{d}\mu(\gamma) = 0$$

per μ-quasi ogni $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. E' un caso particolare del Corollario 2.9.9. di [3]. □

Capitolo 2

Misure di Plancherel

2.1 Gruppi a crescita polinomiale

In questa sezione, G sarà un gruppo connesso non compatto a crescita polinomiale e sarà fissato $\Delta = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Indichiamo con $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ la risoluzione dell'identità associata ad $\mathscr{L}$.

Proposizione 2.1. *Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ boreliana, allora $f(\mathscr{L})$ commuta con le traslazioni sinistre.*

Dimostrazione. Le traslazioni sinistre $\{L_x\}_{x \in G}$ sono una famiglia di operatori unitari su L^2, per cui $L_x \mathscr{L}|_{C_c^\infty} L_x^{-1}$ è un operatore essenzialmente autoaggiunto, che ha $L_x \mathscr{L}\, L_x^{-1}$ come unica estensione autoaggiunta (per il Teorema 1.5). Ma poiché $\mathscr{L}$ commuta con le traslazioni sinistre, si ha che $L_x \mathscr{L}|_{C_c^\infty} L_x^{-1} = \mathscr{L}|_{C_c^\infty}$, che ha $\mathscr{L}$ come unica estensione autoaggiunta. Di conseguenza, si deve avere che $L_x \mathscr{L}\, L_x^{-1} = \mathscr{L}$. $\square$

Ricordiamo il Teorema del nucleo di Schwartz, adattato al caso particolare di operatori invarianti a sinistra su Gruppi di Lie:

Teorema 2.2. *Sia $F : C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(G)^*$ un operatore lineare continuo invariante per traslazioni sinistre. Allora esiste un un'unica distribuzione T su G tale che $F\phi = \phi * T$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(G)$.*

Definizione 2.3. *Per $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ boreliana, tale che $C_c^\infty \subseteq \mathscr{D}(f(\mathscr{L}))$, indichiamo con $\check{f}$ la distribuzione tale che $f(\mathscr{L})\varphi = \varphi * \check{f}$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(G)$.*

Lemma 2.4. *Se $C_c^\infty \subseteq \mathscr{D}(f(\mathscr{L})), \mathscr{D}(fg(\mathscr{L}))$ e $\check{g} \in \mathscr{D}(f(\mathscr{L}))$, allora $(fg)^\vee = f(\mathscr{L})\check{g}$.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in C_c^\infty$. Allora

$$(fg)(\mathscr{L})\phi = f(\mathscr{L})g(\mathscr{L})\phi = f(\mathscr{L})(\phi * \check{g}) = f(\mathscr{L}) \int_G \phi(y) L_y \check{g} \mathrm{d}y.$$

Ma $\phi \in C_c^\infty$, quindi esistono a_i^n, y_i^n tali che

$$\sum_i a_i^n L_{y_i^n} \check{g} \to \int_G \phi(y) L_y \check{g}$$

e

$$\sum_i a_i^n L_{y_i^n} \mathscr{L} \check{g} \to \int_G \phi(y) L_y \mathscr{L} \check{g}.$$

Per cui essendo l'operatore $f(\mathscr{L})$ chiuso e invariante per traslazioni, si ha che

$$f(\mathscr{L}) \int_G \phi(y) L_y \check{g} \mathrm{d}y = \int_G \phi(y) L_y f(\mathscr{L}) \check{g} = \phi * f(\mathscr{L}) \check{g}.$$

□

Sia $\phi : G \to \mathbb{C}$. Indichiamo con ϕ^* la funzione $\phi^*(x) = \overline{\phi(x^{-1})}$.

Lemma 2.5. *Sia f come nella Definizione 2.3 tale che $\check{f}$ sia una funzione localmente integrabile. Allora $(\check{f})^* = \overline{f}^\vee$.*

Dimostrazione. Poiché per il Teorema Spettrale $f(\mathscr{L})^* = \overline{f}(\mathscr{L})$, basta notare che

$$\langle \phi * \check{f}, \psi \rangle = \int_G \int_G \phi(y) \check{f}(y^{-1}x) \overline{\psi(x)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\int_G \phi(y) \int_G \overline{\psi(x)} \check{f}(y^{-1}x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$$

$$\int_G \phi(y) \overline{\psi * (\check{f})^*(y)} \mathrm{d}y = \langle \phi, \psi * \check{f}^* \rangle$$

per ogni $\phi, \psi \in C_c^\infty(G)$. □

Adesso siamo pronti a dimostrare il primo risultato importante di questa tesi:

Teorema 2.6. *Esiste un'unica misura positiva μ su $\mathbb{R}^+$ tale che $\check{f} \in L^2(G)$ se e solo se $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$ e*

$$\|\check{f}\|_{L^2(G)}^2 = \int_{\mathbb{R}^+} |f|^2(\lambda) \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Dimostrazione. L'unicità è automatica dalla formula. Sia $b > 0$, f limitata con supporto compatto in $[0,b]$. Allora $\check{f} = \left(e^{(\cdot)} f \mathbb{1}_{(0,b]} e^{-(\cdot)}\right)^\vee = e^{\mathscr{L}} f(\mathscr{L}) \mathbb{1}_{(0,b]}(\mathscr{L}) p_1$, da cui, per 1.14, $\|\check{f}\|_{L^2} \leqslant \|f\|_\infty C e^b$. Quindi,

$$\|\check{f}\|_{L^2}^2 = \check{f} * \check{f}^*(e) = f * \check{f}^* * \check{\mathbb{1}}_{[0,b]} * \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(e) =$$

$$= \left(|f|^2\right)^\vee * \check{\mathbb{1}}_{[0,b]} * \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(e) = |f|^2(\mathscr{L}) \check{\mathbb{1}}_{[0,b]} * \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(e)$$

$$\left\langle |f|^2(\mathscr{L}) \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}, \check{\mathbb{1}}_{[0,b]} \right\rangle = \int_{R^+} |f|^2 \mathrm{d}E_\lambda \left(\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}, \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right)$$

per cui per f limitata a supporto compatto in $[0,b]$, esiste una misura μ_b per cui vale l'enunciato della tesi. Ma poiché questo è vero indipendentemente da b, si deve avere che le misure $\mathrm{d}E_\lambda \left(\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}, \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right)$ si incollano ad un'unica misura boreliana μ. Inoltre, se $f \in L^2(\mu)$, chiamando f_n la proiezione di f sul convesso delle funzioni limitate in modulo da n a supporto in $[0,n]$, vale che:

- $\|\check{f}_n - \check{f}_m\|_{L^2} = \|f_n - f_m\|_{L^2}$, quindi $\check{f}_n$ è una successione di Cauchy in $L^2(G)$, quindi converge fortemente ad una certa funzione g in L^2.
- Se ϕ è nel dominio di $f(\mathscr{L})$, allora $f_n(\mathscr{L})\phi \to f(\mathscr{L})\phi$ fortemente in L^2.
- Quindi, in distribuzione (e a posteriori in C_0), $\phi * g = \lim \phi * \check{f}_n = \lim f_n(\mathscr{L})\phi = f(\mathscr{L})\phi$.
- Poiché il dominio di $f(\mathscr{L})$ è denso in L^2, $\check{f} = g$ e quindi

$$\|\check{f}\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2 = \int |f|^2 \mathrm{d}\mu.$$

Infine, se f non è in L^2, supponiamo per assurdo che $\check{f}$ sia in L^2. Allora prendendo $f_n := f \mathbb{1}_{\{|f|<n\}} \mathbb{1}_{[0,n]}$, si ha che $\|\check{f}_n\|_{L^2} \to +\infty$. Ma se $\operatorname{supp} g \subseteq \{|f| < n\} \cap [0,n]$, $f(\mathscr{L})\check{g} = f_n(\mathscr{L})\check{g}$, per cui

$$\|\check{f}\|_{L^2} = \|f(\mathscr{L})\|_{2\to\infty} \geqslant \frac{f(\mathscr{L})\overline{f_n}^\vee(e)}{\left\|\overline{f_n}^\vee\right\|_{L^2}} = \frac{f_n(\mathscr{L})\overline{f_n}^\vee(e)}{\left\|\overline{f_n}^\vee\right\|_{L^2}} =$$

$$= \frac{\check{f}_n * \check{f}_n^*(e)}{\left\|\overline{f_n}^\vee\right\|_{L^2}} = \frac{\|\check{f}_n\|_{L^2}^2}{\|\check{f}_n\|_{L^2}} = \|\check{f}_n\|_{L^2} \to +\infty,$$

assurdo. □

Proposizione 2.7. *Sia F la funzione di ripartizione della misura μ data dal Teorema 2.6. Allora:*

$$\begin{cases} F(b) & \leqslant & Cb^{\frac{D}{2}} \quad \text{per } b<1 \\ F(b) & \leqslant & Cb^{\frac{d}{2}} \quad \text{per } b>1 \end{cases}$$

Dimostrazione.

$$F(b)=\mu([0,b])=\left\|\mathbb{1}_{[0,b]}\right\|_{L^2}^2 \leqslant \left\|ee^{-\frac{\cdot}{b}}\right\|_{L^2}^2 = e^2\left\|\left(e^{-\frac{\cdot}{b}}\right)^{\vee}\right\| = e^2\left\|p_{\frac{1}{b}}\right\|_{L^2}^2,$$

per cui la tesi segue dalle stime del Teorema 1.14. □

Lemma 2.8. *Lo spazio vettoriale $X=\mathrm{Span}\,\{e^{-t\cdot}\,|\,t\in\mathbb{R}^+\}$ è denso in $L^p(\mu)$ per ogni $1\leqslant p<+\infty$. Inoltre, $X_{\mathbb{R}}=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\,\{e^{-t\cdot}\,|\,t\in\mathbb{R}^+\}$ è denso in $L^p_{\mathbb{R}}(\mu):=L^p(\mu)\cap\{f|f\text{ è reale quasi ovunque}\}$ $\forall p:1\leqslant p<+\infty$.*

Dimostrazione. Per linearità, basta dimostrare la tesi per $X_{\mathbb{R}}$. Per il teorema di Stone-Weierstrass, essendo $X_{\mathbb{R}}$ un'algebra di funzioni in $C_0\left([0,+\infty),\mathbb{R}\right)$ che separa i punti e che contiene una funzione che non si annulla mai, $X_{\mathbb{R}}$ è denso in $C_0\left([0,+\infty),\mathbb{R}\right)$. Sia f continua a supporto compatto, $\mathrm{supp}(f)\subseteq[0,b]$, f a valori reali. Sia $g_n\in X_{\mathbb{R}}$ tale che $\|fe^{n\cdot}-g_n\|_\infty\leqslant n^{-1}$. Allora $g_ne^{n\cdot}\in X_{\mathbb{R}}$ e $\left|f(\lambda)-g_n(\lambda)e^{n\lambda}\right|\leqslant n^{-1}e^{-n\lambda}$. Per cui, per la Proposizione 2.7:

$$\|f-e^{-n\cdot}g_n\|_{L^p}^p=\int_{[0,b]}|f-e^{-n\cdot}g_n|(\lambda)\mathrm{d}\mu(\lambda)+\int_{(b,+\infty)}|f-e^{-n\cdot}g_n|(\lambda)\mathrm{d}\mu(\lambda)\leqslant$$

$$\int_{[0,b]}\frac{1}{n}\mathrm{d}\mu(\lambda)+\int_{(b,+\infty)}\frac{e^{-n\lambda}}{n}\mathrm{d}\mu(\lambda)=$$

$$\frac{F(b)}{n}+\frac{e^{-nb}}{n}F(b)+\int_{(b,+\infty)}e^{-n\lambda}F(\lambda)\mathrm{d}\lambda\leqslant$$

$$\frac{F(b)}{n}+\frac{e^{-nb}}{n}F(b)+C_b\int_{(b,+\infty)}e^{-n\lambda}\lambda^D\mathrm{d}\lambda,$$

che tende a 0 per $n\to\infty$, quindi $f\in\overline{X_{\mathbb{R}}}$. Ma poiché C_c è denso in L^p, allora $L^p\subseteq\overline{X_{\mathbb{R}}}$. □

Lemma 2.9. *Se $f,g,fg\in L^2(\mu)$, allora $(fg)^{\vee}=\check{f}*\check{g}$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.4 e il Teorema 2.6, se $h\in C_c^\infty$, allora $(fh)^\vee=\mathscr{L}f*\check{h}=\check{f}*\check{g}$. Quindi, se $g_n\to h$ in L^2, con $g_n\in C_c^\infty$, allora $\check{f}*\check{g}_n\to\check{f}*\check{g}$ in C_0 e $(fg_n)^\vee\to(fg)^\vee$ in distribuzione, quindi $(fg)^\vee=\check{f}*\check{g}$. □

Proposizione 2.10. *La mappa* $^\vee : L^1(\mu) \cap L^2(\mu) \to L^2(G)$ *è tale che*

$$\big(L^1(\mu) \cap L^2(\mu)\big)^\vee \subseteq C_0$$

e si estende ad una mappa lineare continua $L^1(\mu) \to C_0$ *tale che* $\|\check{f}\|_\infty \leqslant \|\check{f}\|_{L^1(\mu)}$.

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$. Sia $f = \sqrt{|f|}g$, con $|g| = \sqrt{|f|}$. Allora $\left\|\sqrt{|f|}\right\|^2_{L^2(\mu)} = \|g\|^2_{L^2(\mu)} = \|f\|_{L^1}$. Per il Lemma 2.9, $\check{f} = \sqrt{|f|}^\vee * \check{g}$, quindi $\check{f} \in C_0$. Inoltre

$$\|\check{f}\|_{C_0} \leqslant \left\|\sqrt{|f|}^\vee\right\|_{L^2(G)} \|\check{g}\|_{L^2(G)} = \left\|\sqrt{|f|}\right\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\mu)} = \left\|\sqrt{|f|}\right\|^2_{L^2(\mu)} = \|f\|_{L^1},$$

da cui segue la tesi per densità di $L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ in $L^1(\mu)$. □

Attraverso quest'ultima Proposizione, siamo pronti a definire l'operatore K descritto nell'introduzione, e a dimostrare qualche sua proprietà basilare:

Teorema 2.11. *Esiste una funzione* $K : G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $K \in L^\infty(\mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}x)$, $\|K\|_\infty \leqslant 1$ *tale che* $\forall f \in L^1(\mu)$,

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) K(\lambda, x) \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Inoltre, per quasi ogni λ, $K(\lambda, \cdot) \in C^\infty(G)$ *e* $\Delta K(\lambda, \cdot) = -\lambda K$.

Dimostrazione. Definiamo l'operatore $\Lambda : L^1(\mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}x) \to \mathbb{C}$ come

$$\Lambda H := \int_G H(\cdot, x)^\vee(x) \mathrm{d}x.$$

Per la Proposizione 2.10, si ha che $\|H(\cdot, x)^\vee\|_\infty \leqslant \|H(\cdot, x)\|_{L^1}$, per cui si ha che $\|\Lambda\| \leqslant 1$. Di conseguenza, esiste una funzione $K \in L^\infty(\mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}x)$, $\|K\|_{L^\infty} \leqslant 1$, tale che

$$\Lambda H = \int_G \int_{\mathbb{R}^+} H(\lambda, x) K(\lambda, x) \mathrm{d}\mu(\lambda) \mathrm{d}\mu x.$$

Specializzando questa identità ad H della forma $H(\lambda, x) = f(\lambda)\phi(x)$, con $f \in L^1(\mu)$,$\phi \in L^1(G)$, si ha che

$$\int_G \check{f}(x)\phi(x) \mathrm{d}x = \int_G \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda)\phi(x) K(\lambda, x) \mathrm{d}\mu(\lambda) \mathrm{d}x,$$

per cui si deve avere che per quasi ogni x, $\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) K(\lambda, x) \mathrm{d}\mu(\lambda)$. Inoltre, se $f \in L^1([0, b], \mathrm{d}\mu)$, per il Lemma 2.4 $\mathscr{L}(\check{f}) = (\cdot f(\cdot))^\vee$. Quindi, se $\phi \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_G \int_{\mathbb{R}^+} \mathscr{L}\phi(y) f(\lambda) K(\lambda, y^{-1}) \mathrm{d}\mu(\lambda) \mathrm{d}y = \int_G \mathscr{L}\phi(y) \check{f}(y^{-1}) \mathrm{d}y =$$

$$\mathscr{L}\phi * \check{f}(e) = f(\mathscr{L})\mathscr{L}\phi(e) = \mathscr{L}f(\mathscr{L})\phi(e) = \phi * (\cdot f(\cdot))^\vee(e) =$$
$$\int_G \phi(y)(\cdot f(\cdot))^\vee(y^{-1})\mathrm{d}y = \int_G \int_{\mathbb{R}^+} \phi(y)\lambda f(\lambda)K(\lambda, y^{-1})\mathrm{d}\mu(\lambda)\mathrm{d}y.$$

Di conseguenza, per ogni $\phi \in C_c^\infty$, $\langle \mathscr{L}K(\lambda,\cdot), \phi\rangle = \langle \lambda K(\lambda,\cdot),\phi\rangle$ per quasi ogni λ. Ma poiché $C_0^2(G)$ è separabile e C_c^∞ è denso in C_0^2, si ha che per quasi ogni λ, $\langle \mathscr{L}K(\lambda,\cdot), \phi\rangle = \langle \lambda K(\lambda,\cdot),\phi\rangle$ per un insieme di ϕ denso in C_0^2. Ma poiché $\mathscr{L} : C_0^2 \to \mathbb{C}$ è continuo, questo implica che per lo stesso insieme di λ, $\langle \mathscr{L}K(\lambda,\cdot), \phi\rangle = \langle \lambda K(\lambda,\cdot),\phi\rangle$ per ogni $\phi \in C_0^2$, e quindi per ogni $\phi \in C_c^\infty$. Di conseguenza, per quasi ogni λ, $\mathscr{L}K(\lambda,\cdot) = \lambda K(\lambda,\cdot)$ in distribuzione.
Essendo Δ ipoellittico, questo implica che, a meno di modificare K su un insieme di misura nulla nella variabile x, per quasi ogni λ si ha che $K(\lambda,\cdot)$ è C^∞ e $\Delta K(\lambda,\cdot) = -\lambda K$. □

Lemma 2.12. *Sia K come nel Teorema 2.11. Allora, per quasi ogni λ, $K(\lambda,\cdot)$ è reale e pari (cioè $K(\lambda,x) = K(\lambda,x^{-1})$ per ogni $x \in G$).*

Dimostrazione. La tesi è equivalente a dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda, x^{-1})f(x)\mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda,x)f(x)\mathrm{d}\mu(\lambda) \in \mathbb{R}$$

$\forall f \in L^1$ reale $\forall x \in G$. Poiché K è limitato in L^∞, è sufficiente verificare la tesi su un denso, come $X_\mathbb{R}$ del Lemma 2.8. Quindi sia $f \in X_\mathbb{R}$, $f(\lambda) = \sum_{i\in I} a_i e^{-t_i\lambda}$, con $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in I$. Dunque per linearità, basta dimostrare la tesi per $e^{-t\lambda}$. Per il Teorema 1.13:

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda,x)f(x)\mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda,x)e^{-t\lambda}\mathrm{d}\mu(\lambda) = p_t(x) =$$

$$p_t(x^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda,x^{-1})e^{-t_i\lambda}\mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} K(\lambda,x^{-1})f(x)\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

che è reale sempre per il Teorema 1.13. □

Teorema 2.13. *Sia $\phi \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Allora $\hat{\phi} := {}^{\vee *}(\phi)$ è dato da*

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_G \phi(x)K(\lambda,x)\mathrm{d}x,$$

e quindi $\hat{}$ si estende in modo unico ad una funzione continua da $L^1(G)$ a $L^\infty(G)$.

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$. Allora, per il Teorema 2.11 e per il Lemma 2.12:

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda)\overline{\hat{\phi}(\lambda)}\mathrm{d}\mu(\lambda) = \left\langle f, \hat{\phi}\right\rangle =$$

$$\langle \check{f}, \phi \rangle = \int_G \check{f}(x)\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x =$$

$$\int_G \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda)K(\lambda, x)\overline{\phi(x)}\mathrm{d}\mu(\lambda)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) \int_G K(\lambda, x)\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(\lambda) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) \int_G \overline{(\phi(x)K(\lambda, x))}\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(\lambda)$$

da cui segue la tesi per densità di $L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ in $L^2(\mu)$. □

Proposizione 2.14. *Se f è μ-localmente integrabile, e $\check{f} \in L^1(G)$, allora*

$$\check{f} * K(\lambda, \cdot) = K(\lambda, \cdot) * \check{f} = f(\lambda)K(\lambda, \cdot)$$

per μ-quasi ogni λ.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.17, per quasi ogni λ vale che

$$K(\lambda, x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \int_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]} K(\lambda, x)\mathrm{d}\mu(\lambda) =$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \check{\mathbb{1}}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])}(x).$$

Per il Teorema 2.13,

$$\left\| \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \check{\mathbb{1}}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])} \right\|_\infty$$

è uniformemente limitato in δ. Quindi, per convergenza dominata e per il Lemma 2.9:

$$\left|\left(\check{f} * K(\lambda, \cdot)\right)(x) - f(\lambda)K(\lambda, x)\right| =$$

$$\left|\lim_{\delta \to 0} \check{f} * \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \check{\mathbb{1}}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])}(x) - f(\lambda)\check{\mathbb{1}}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])}(x)\right| =$$

$$\left|\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \left(f - f(\lambda)\mathbb{1}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])}\right)^\vee(x)\right| \leqslant$$

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{1}{\mu\left([\lambda - \delta, \lambda + \delta]\right)} \left\|f - f(\lambda)\mathbb{1}_{([\lambda-\delta,\lambda+\delta])}\right\|_{L^1(\mu)} = 0$$

per μ-quasi ogni λ, sempre per il Teorema 1.17.
Infine, poiché il gruppo G è separabile, e le funzioni $\check{f} * K(\lambda, \cdot)$, $K(\lambda, \cdot)$ sono continue per quasi ogni λ, si può scegliere l'insieme per cui vale la tesi indipendentemente da x. La dimostrazione per $\left(K(\lambda, \cdot) * \check{f}\right)(x) - f(\lambda)K(\lambda, x)$ è analoga. □

Lemma 2.15. *Se T è un monomio di grado r in $X_1, \dots, X_n$, allora esiste una costante A indipendente da r tali che per quasi ogni λ*

$$\|TK(\lambda, \cdot)\|_\infty \leqslant A^r \lambda^{\frac{r}{2}}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.14 con $f = p_t$, per ogni t si ha che per quasi ogni λ:

$$K(\lambda, \cdot) = e^{t\lambda} K(\lambda, \cdot) * p_t.$$

Inoltre, poiché i razionali sono densi in $\mathbb{R}$ e p_t è continua in t, l'insieme dei λ per cui vale l'uguaglianza si può scegliere indipendentemente da t. Quindi, scegliendo $t = \frac{1}{\lambda}$, si ha che, per quasi ogni λ,

$$K(\lambda, \cdot) = eK(\lambda, \cdot) * p_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Quindi, per il Teorema 1.14,

$$|X_j TK(\lambda, \cdot)| = \left| eTK(\lambda, \cdot) * X_j p_{\frac{1}{\lambda}} \right| \leqslant$$

$$e \|TK(\lambda, \cdot)\|_\infty \left\| X_j p_{\frac{1}{\lambda}} \right\|_{L^1} \leqslant eC\lambda^{\frac{1}{2}} \|TK(\lambda, \cdot)\|_\infty ,$$

per cui la tesi segue procedendo induttivamente su T. □

Osserviamo inoltre che questa stima in λ non è migliorabile: come si vedrà più nel dettaglio nel Capitolo 3, scegliendo $G = \mathbb{R}$, $\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, si ottiene che

$$K(\lambda, x) = \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right),$$

e quindi

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} K(\lambda, x) \right\|_\infty = \lambda^{\frac{r}{2}}.$$

Teorema 2.16. *La funzione $K(\lambda, \cdot)$ è analitica per quasi ogni λ.*

Dimostrazione. La tesi segue direttamente dal Lemma 2.15. □

Proposizione 2.17. *Per quasi ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $K(\lambda, e) \equiv 1$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(\mu)$. Allora, poiché il nucleo del calore p_t è un'identità approssimata per $t \to 0$ e $p_t = p_t^*$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) K(\lambda, e) \mathrm{d}\mu(\lambda) = \check{f}(e) = \lim_{t \to 0} \check{f} * p_t(e) = \lim_{t \to 0} \left\langle \check{f}, p_t \right\rangle =$$

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) e^{-t\lambda} \mathrm{d}\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) \mathrm{d}\mu(\lambda).$$

□

Proposizione 2.18. *A meno di modificare $K(\lambda,\cdot)$ su un insieme di misura nulla in λ, $K(0,\cdot) := \lim_{\lambda\to 0} K(\lambda,\cdot) \equiv 1$ nella topologia di $C^\infty(G)$ e anche in $L^\infty(G)$ con la topologia w^*.*

Dimostrazione. A meno di cambiare $K(\cdot,x)$ su un insieme di misura nulla, posso supporre che in un intorno di 0 valgano la Proposizione 2.17 e la Proposizione 2.14 applicata ad $f = e^{-t\cdot}$.
Per il Lemma 2.15, le funzioni $TK(\lambda,\cdot)$ sono equilipshitziane per $\lambda < 1$. Sia quindi H un punto limite di $K(\lambda,\cdot)$ per $\lambda \to 0$ e siano λ_n tali che $K(\lambda_n,\cdot) \to H$ in $C^\infty(G)$. A meno di sottosuccessioni, posso supporre che la convergenza sia anche in L^∞ debole*. Allora:

$$\mathscr{L}H = \lim_n \mathscr{L}K(\lambda_n,\cdot) = \lim_n \lambda_n K(\lambda_n,\cdot) = 0,$$

e per la Proposizione 2.17,

$$H(e) = \lim_n K(\lambda_n, e) = 1$$

e per il Teorema 2.11,

$$\|H\|_\infty \leqslant \limsup_n \|K(\lambda_n,\cdot)\|_\infty = 1.$$

Inoltre per la Proposizione 2.14, e per convergenza dominata:

$$p_t * H = \lim_n p_t * K(\lambda_n,\cdot) = \lim_n e^{-\lambda_n t} K(\lambda_n,\cdot) = H,$$

ma quindi

$$1 = H(e) = p_t * H(e) = \int_G p_t(y) H(y^{-1}x)\mathrm{d}y \leqslant \int_G p_t(y)\mathrm{d}y = 1,$$

per cui si deve avere $H \equiv 1$. □

Teorema 2.19. *Sia $f \in L^1(G)$. Allora $\check{f}$ è continua in 0 (a meno di modifiche su un insieme di misura nulla).*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.17, a meno di modificare $K(\lambda,\cdot)$ (e quindi $\check{f}$) su un insieme di misura nulla,

$$\check{f}(0) = \int_G f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\int_G f(x)K(\lambda,x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\check{f}(\lambda).$$

□

Teorema 2.20. *Sia $f \in H^k(\mathbb{R}^+)$, f a supporto compatto in $[0,b]$. Allora per ogni $0 < \alpha < 2k-1$ esistono $C_{k,\alpha}$ e M tali che*

$$\int_G \left|\check{f}(x)\right|^2 |x|^\alpha \mathrm{d}x < C_{k,\alpha}(1+b^M)\, \|f\|_{H^k}.$$

Dimostrazione. Senza perdere generalità, posso supporre $b > 1$. Sia $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pari tale che $f(\lambda) = h_t\left(\sqrt{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$. Allora

$$\check{f} = h(\mathscr{L}^{\frac{1}{2}})p_t = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{h}_t(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) p_t \mathrm{d}s,$$

con $\hat{h}$ l'usuale trasformata di Fourier di h. Poiché $h \in H^k$ a supporto compatto con $k > \frac{1}{2}$, si ha che $\hat{h}_t \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Quindi

$$\int_G \left|\check{f}(x)\right|^2 |x|^\alpha \mathrm{d}x = C\int_{|x|>1} \left|\check{f}(x)\right|^2 \int_0^{|x|} r^{\alpha-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x + \int_{B_1} \left|\check{f}(x)\right|^2 |x|^\alpha \mathrm{d}x =$$

$$C\int_1^\infty r^{\alpha-1}\int_{|x|>r} \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}r + C\int_0^1 r^{\alpha-1}\int_{|x|>r} \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}r +$$

$$\int_{B_1} \left|\check{f}(x)\right|^2 |x|^\alpha \mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\int_1^\infty r^{\alpha-1}\int_{|x|>r} \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}r + C\left\|\check{f}\right\|_{L^2(G)} =$$

$$C\int_1^\infty r^{\alpha-1}\int_{|x|>r} \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}r + C\|f\|_{L^2(\mu)} \tag{2.1}$$

Scegliendo $c = b^{-1}$, in modo che $\|h_c\|_{H^k} \leqslant Cb^k \|f\|_{H^k}$,

$$\int_{|x|>r} \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x = C\int_{|x|>r} \left|\int_0^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) p_c \mathrm{d}x\right|^2.$$

Vale che, per la propagazione a velocità finita per la soluzione dell'equazione delle onde:

$$\left\|\int_0^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) p_c\Big|_{B_r^c}\right\|_{L^2(G)}^2 \leqslant$$

$$\left\|C\int_0^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_c \mathbb{1}_{B_{\frac{r}{2}}}\right)\mathrm{d}s\Big|_{B_r^c}\right\|_{L^2(G)}^2 +$$

$$\left\|C\int_0^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_c \mathbb{1}_{B^c_{\frac{r}{2}}}\right)\mathrm{d}s\Big|_{B_r^c}\right\|_{L^2(G)}^2 \leqslant$$

$$\left\| C\int_{\frac{r}{2}}^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_c \mathbb{1}_{B_{\frac{r}{2}}}\right) \mathrm{d}s \Big|_{B_r^c} \right\|_{L^2(G)}^2 + \left\| C\int_{0}^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_c \mathbb{1}_{B^c_{\frac{r}{2}}}\right) \mathrm{d}s \right\|_{L^2(G)}^2$$

Poiché $\int_0^{+\infty} \hat{h}_c(s)\cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right) = h_c(\mathscr{L}^{\frac{1}{2}})$ e $\left\| h_c(\mathscr{L}^{\frac{1}{2}})\right\|_{L^2\to L^2} \leqslant \|h_c\|_\infty$, questo si stima con

$$C\left\| \int_{\frac{r}{2}}^{+\infty} \frac{1}{s^k}\left|\widehat{h_c^{(k)}}(s)\right| \cos\left(s\mathscr{L}^{\frac{1}{2}}\right)\left(p_c \mathbb{1}_{B_{\frac{r}{2}}}\right) \mathrm{d}x \right\|_{L^2(G)}^2 + \|h_c\|_\infty^2 \left\| p_c \mathbb{1}_{B^c_{\frac{r}{2}}}\right\|_{L^2(G)}^2$$

$$\leqslant Cr^{-2k+1}\left\|h_c^{(k)}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \|p_c\|_{L^2(G)}^2 + C\|f\|_\infty^2 \left\| p_c \mathbb{1}_{B^c_{\frac{r}{2}}}\right\|_{L^2(G)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{-2k+1} b^{2k}\|f\|_{H^k}^2 c^{-d} + C\|f\|_\infty^2 Cc^{-d}e^{-C\frac{r^2}{c}}.$$

Di conseguenza

$$C\int_1^{+\infty} r^{\alpha-1}\int_{|x|>r}\left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}r \leqslant$$

$$C\int_1^{+\infty} r^{\alpha-1}c^{-d}r^{-2k+1}b^{2k}\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}^2 \leqslant$$

$$Cb^{2k+d}\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^+)}^2.$$

Inoltre

$$\|f\|_{L^2(\mu)}^2 \leqslant \|f\|_\infty^2 \mu([0,b]) \leqslant Cb^{\frac{d}{2}}\|f\|_{H^k},$$

per cui la tesi segue sommando in 2.1. $\square$

Teorema 2.21. *La mappa* $^\vee$ *manda* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ *in* $\mathcal{S}(G)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{O}^r(G) := \{f \text{ localmente integrabili} : (1+|x|^{-r})f \in L^2(G)\}$. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, e sia ρ_n una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^+)$, con $0 \leqslant \rho_n \leqslant 1$, tale che $\operatorname{supp}(\rho_n) \subseteq B_{n+1}$, $\rho_n \equiv 1$ su B_n e $\|\rho_n\|_{C^k} \leqslant C$, con C indipendente da n. Per il Teorema 2.20,

$$\int_G |x|^m \left|\check{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x =$$

$$\int_G |x|^m \left|(f\rho_1)^\vee(x)\right|^2 \mathrm{d}x + \sum_n \int_G |x|^m \left|(f(\rho_{n+1}-\rho_n))^\vee(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant$$

$$C\,\|f\rho_1\|_{H^k}^2 + C\sum_n n^M \,\|f(\rho_{n+1}-\rho_n)\|_{H^k}^2 .$$

Ma poiché se $\rho_{n+1} - \rho_n(x) \neq 0$, allora $n \leqslant x \leqslant n+2$, questo è $\leqslant$ di:

$$C\,\|f\|_{H^k}^2 + C\sum_n \left\|\cdot^{\frac{M}{2}} f(\rho_{n+1}-\rho_n)\right\|_{H^k}^2 \leqslant$$

$$C\,\|f\|_{H^k}^2 + C\left\|\cdot^{\frac{M}{2}} f\right\|_{H^k}^2 < +\infty,$$

quindi $\check{f} \in \mathcal{O}^r(G)$ $\forall r \in \mathbb{R}$. Analogamente, dato che $\mathscr{L}^n\check{f} = (\cdot^n f)^\vee$, anche $\mathscr{L}^n\check{f} \in \mathcal{O}^r(G)$ $\forall r \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, per ipoellitticità di $\mathscr{L}$, dato un qualsiasi operatore differenziale T invariante a sinistra, esiste k tale che

$$\lim_{x\to\infty} |x|^\alpha |T\check{f}(x)| \leqslant \limsup_{x\to\infty} C|x|^\alpha \left\|\mathscr{L}^k\check{f}\right\|_{B_r(x)} = 0,$$

per cui $T\check{f} \in \mathcal{O}^{-\infty}(G)$ per ogni T come sopra, da cui $\check{f} \in \mathcal{S}(G)$. □

2.2 Gruppi Omogenei

In questa sezione, analizziamo le proprietà della misura μ del Teorema 2.6 e dei nuclei definiti dal Teorema 2.11 in un caso speciale.

Definizione 2.22. *Un gruppo di Lie G si dice* omogeneo graduato *rispetto ad una famiglia di dilatazioni* $\{\delta_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ *se*

(*i*) $\delta_\tau : G \to G$ *è un automorfismo di gruppo,*

(*ii*) $\delta_\sigma\delta_\tau = \delta_{\sigma\tau}$

(*iii*) *Si può scomporre l'algebra di Lie di G come* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ *in modo che per ogni* τ, $\mathrm{d}\delta_\tau|_{\mathfrak{g}_i} = \tau^i I$.

Indichiamo con $\delta_\tau x$ anche con $\tau \cdot x$.

Proposizione 2.23. *Sia G un gruppo omogeneo graduato rispetto alle dilatazioni δ_τ. Allora G è nilpotente e $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$*

Dimostrazione. Sia $\tau = 2$, $x \in \mathfrak{g}_i$, $y \in \mathfrak{g}_j$. Allora $\mathrm{d}\delta_2 [x, y] = [\mathrm{d}\delta_2 x, \mathrm{d}\delta_2 y] = 2^{i+j} [x, y]$, da cui $[x, y] \in \mathfrak{g}_{i+j}$. Inoltre, se $i + j > n$, $\mathfrak{g}_{i+j} = 0$, quindi $[x, y] = 0$. Sia adesso $v_j = \bigoplus_{i=j}^n \mathfrak{g}_i$. Allora, per induzione, $\mathfrak{g}^k \subseteq v_k$:

$$\mathfrak{g}^{k+1} = \left[\mathfrak{g}^k, \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i\right] = \sum_{i=1}^n \left[\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}_i\right] \subseteq \sum_{i=1}^n [v_k, \mathfrak{g}_i] \subseteq \sum_{i=1}^n v_{k+i} \subseteq v_{k+1}.$$

Di conseguenza, se $k > n$, $\mathfrak{g}^k = 0$, e quindi G è nilpotente. □

Assumiamo adesso G semplicemente connesso. Essendo G nilpotente, G è diffeomorfo ad $\mathbb{R}^N$ per un certo N attraverso la mappa esponenziale, la mappa di traslazione L_x in carta è polinomiale in x (per la formula di Baker-Campbell-Hausdorff) e la misura di Haar è uguale alla misura di Lebesgue. Di conseguenza, essendo il prodotto fra due elementi polinomiale, si ha che G è a crescita polinomiale. (Tutti questi risultati si possono trovare in dettaglio in [10]).

Lemma 2.24. *Sia $Y \in \mathfrak{g}$. Allora*

$$\tau \cdot \exp(tY) = \exp(t\mathrm{d}\delta_\tau Y).$$

In particolare, se $Y \in \mathfrak{g}_i$, allora

$$\tau \cdot \exp(tY) = \exp(t\tau^i Y).$$

Dimostrazione. Vale che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tau \cdot \exp(tY) = \mathrm{d}\delta_\tau \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tY)\right) = \mathrm{d}\delta_\tau(Y),$$

da cui segue la tesi per definizione di exp. □

Lemma 2.25. *Sia $Q := \sum_{i=1}^n i \dim(g_i)$. Allora lo Jacobiano della mappa $\delta_\tau : G \to G$ è $|J\delta_\tau| = \tau^Q$*

Dimostrazione. Essendo δ_τ un automorfismo di gruppo, basta calcolarne il determinante del differenziale nell'identità, in quanto l'immagine della misura di Haar attraverso automorfismi è un'altra misura di Haar (e quindi cambia di una costante). Ma poiché $\mathrm{d}\delta_\tau|_{g_i} = \tau^i I$, vale che nell'elemento neutro

$$|J\delta_\tau| = \prod_{i=1}^k \tau^{i \dim(g_i)} = \tau^{\sum_{i=1^n} i \dim(g_i)} = \tau^Q.$$

□

Definizione 2.26. *Un gruppo omogeneo si dice* stratificato *se la sua algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è generata da* $\mathfrak{g}_1$.

Adesso consideriamo su un gruppo stratificato G un Sublaplaciano della forma $\Delta = \sum_{i=1}^n X_i^2$, con $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ una base di $\mathfrak{g}_1$. Ricordiamo che $|x| := d(e,x)$. Si ha che:

Proposizione 2.27. *La dimensione* d *in* 0 *di* G *è uguale alla sua dimensione* D *all'infinito e* $d = D = Q = \sum_{i=1^n} i \dim(g_i)$

Dimostrazione. In quanto δ_τ è un automorfismo, la distanza di Carnot-Caratheodory soddisfa

$$d(\tau \cdot x, \tau \cdot y) = \inf_{\substack{\gamma \in \mathbb{C}^\infty((0,1)) \\ \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \\ \gamma(0) = \tau \cdot x, \gamma(1) = \tau \cdot y}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2 \mathrm{d}t} \right\} =$$

$$\inf_{\substack{\tau\gamma \in \mathbb{C}^\infty((0,1)) \\ \mathrm{d}\delta_\tau \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \tau \cdot X_i \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=0}^n \tau^2 a_i^2 \mathrm{d}t} \right\} =$$

$$\inf_{\substack{\gamma \in \mathbb{C}^\infty((0,1)) \\ \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=0}^n \tau^2 a_i^2 \mathrm{d}t} \right\} = \tau d(x,y).$$

Di conseguenza, per il Lemma 2.25,

$$|B_r(x)| = |\delta_\tau B_1(x)| = \tau^Q |B_1(x)| \sim \tau^Q$$

sia per $r \to 0$ che per $r \to \infty$. $\square$

Lemma 2.28. *Sia* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *una funzione boreliana tale che* $\check{f} \in \mathcal{S}'(G)$. *Allora per ogni* $\phi \in \mathcal{S}(G)$, $\delta_{\tau^{-1}} f(\mathscr{L}) \delta_\tau \phi = f(\tau^2 \mathscr{L}) \phi$.

Dimostrazione. Verifichiamo per prima cosa l'omogeneità di $\mathscr{L}$. Per $\phi \in C^\infty(G)$ si ha che, per il Lemma 2.24:

$$\left(\delta_{\tau^{-1}} \mathscr{L} \delta_\tau \phi\right)(x) = \left(\mathscr{L} \delta_\tau \phi\right)(\tau^{-1} \cdot x) = \mathscr{L}\phi(\tau \cdot)(\tau^{-1} x)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \phi\left(x\tau \cdot \exp(tX_i)\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \phi\left(x \exp(t\tau X_i)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$\sum_{i=1}^k \tau^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \phi\left(x \exp(tX_i)\right)\Big|_{t=0} = \left(\tau^2 \mathscr{L} \phi\right)(x),$$

per cui

$$(\delta_{\tau^{-1}}\mathscr{L}\delta_\tau) = \tau^2\mathscr{L}.$$

Di conseguenza essendo δ_τ un multiplo di un operatore unitario,

$$\delta_{\tau^-1}f(\mathscr{L})\delta_\tau = f(\delta_{\tau^{-1}}\mathscr{L}\delta_\tau) = f(\tau^2\mathscr{L})\phi.$$

□

Lemma 2.29. *Sia $T \in S'(G)$, e sia $\tilde{T} : S(G) \to C(G)$ l'operatore definito da $T\phi := \phi * T$. Allora*

$$\left(\delta_{\tau^{-1}}\tilde{T}\delta_\tau\phi\right) = \phi * \tau^{-D}\delta_{\tau^{-1}}T$$

Dimostrazione. Per continuità basta dimostrare il Lemma quando T è una funzione continua ψ. Allora

$$\left(\delta_{\tau^{-1}}\tilde{T}\delta_\tau\phi\right)(x) = \delta_{\tau^{-1}}\left(\delta_\tau\phi * \psi\right)(x) = \delta_\tau\phi * \psi(\tau^{-1}x) =$$

$$\int_G \phi(\tau \cdot y)\psi(y^{-1}\tau^{-1} \cdot x)\mathrm{d}y,$$

che ponendo $z = \tau y$, per il Lemma 2.25, è uguale a

$$\int_G \tau^{-D}\phi(z)\psi(\tau^{-1}z^{-1}\tau^{-1}x)\mathrm{d}z = \int_G \tau^{-D}\phi(z)\delta_{\tau^{-1}}\psi(\tau^{-1}z^{-1}),$$

da cui segue la tesi. □

Lemma 2.30. *Vale che $\|f(\tau^2\cdot)^\vee\|^2_{L^2(G)} = \tau^{-D}\left\|\check{f}\right\|^2_{L^2(G)}$.*

Dimostrazione. Per i Lemmi 2.28 e 2.29, $f(\tau^2\cdot)^\vee = \tau^{-D}\delta_{\tau^{-1}}\check{f}$. Per cui

$$\|f(\tau^2\cdot)^\vee\|^2_{L^2} = \tau^{-2D}\int_G \left|\check{f}(\tau^{-1}\cdot x)\right|^2 \mathrm{d}x =$$

$$\tau^{-2D}\int_G \left|\check{f}(y)\right|^2 \tau^D\mathrm{d}y = \tau^{-D}\left\|\check{f}\right\|^2_{L^2(G)}.$$

□

Teorema 2.31. *Sia G un gruppo stratificato semplicemente connesso, Δ un sublaplaciano omogeneo, e sia μ definita nel Teorema 2.6. Allora μ è assolutamente continua rispetto a Lebesgue e vale che, per una certa costante C,*

$$\mathrm{d}\mu(\lambda) = C\lambda^{\frac{D}{2}-1}\mathrm{d}\lambda.$$

Dimostrazione. Si ha che, per il Lemma 2.30

$$\mu([a,b)) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{[0,b)} \mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{[0,a)} \mathrm{d}\mu =$$

$$\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b)}\right\|_{L^2}^2 - \left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}^2 = \left\|\left(\mathbb{1}_{[0,a)}\left(\frac{a}{b}\cdot\right)\right)^\vee\right\|_{L^2}^2 - \left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}^2 =$$

$$\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}^2 \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{D}{2}} - 1\right) = \left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}^2 \frac{b^{\frac{D}{2}} - a^{\frac{D}{2}}}{a^{\frac{D}{2}}}$$

e analogamente

$$\mu([b,a)) = \left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}^2 \frac{a^{\frac{D}{2}} - b^{\frac{D}{2}}}{a^{\frac{D}{2}}}$$

per cui

$$\mu([\lambda_0, \lambda_1)) = \frac{\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,a)}\right\|_{L^2}}{a^{\frac{D}{2}}} \left(\lambda_1^{\frac{D}{2}} - \lambda_0^{\frac{D}{2}}\right),$$

da cui segue la tesi. □

Lemma 2.32. *Sia G un gruppo stratificato, e sia $X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{1,2}, \dots X_{m,q}$ una base di $\mathfrak{g}$ tale che $X_{\cdot,j}$ sia una base di $\mathfrak{g}_j$. Sia $x \in G$, $x = \exp(\sum_{i,j} a_{i,j} X_{i,j})$. Allora esistono due costanti C, c tali che:*

$$c \sup_{i,j} \left\{|a_{i,j}|^{\frac{1}{j}}\right\} \leqslant |x| \leqslant C \sup_{i,j} \left\{|a_{i,j}|^{\frac{1}{j}}\right\}$$

Dimostrazione. Considero la mappa

$$\phi(a_{1,1}, \dots, a_{m,Q}) = \left|\exp\left(\sum_{i,j} a_{i,j} X_{i,j}\right)\right|.$$

Questa mappa è continua $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, in quanto composizione di mappe continue, quindi assume massimo e minimo sui compatti. Inoltre, se si definisce $\delta_\tau(a_{1,1}, \dots, a_{m,q}) := (\tau a_{1,1}, \dots, \tau^j a_{i,j}, \dots, \tau^q a_{m,q})$, si ha che $\phi(\mathrm{d}\delta_\tau a) = \tau\phi(a)$. Di conseguenza, chiamando M e m rispettivamente il massimo e il minimo di ϕ sull'insieme $\{\sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}} = 1\}$, si ha che, per $a := (a_{i,j})_{i,j}$

$$M \sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}} \geqslant \sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}} \phi\left(\delta_{\left(\sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}}\right)^{-1}}(a)\right) =$$

$$\phi(a) =$$

$$\sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}} \phi\left(\delta_{\left(\sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}}\right)^{-1}}(a)\right) \geqslant m \sup_{i,j} |a_{i,j}|^{\frac{1}{j}},$$

da cui si ha la tesi sostituendo $\phi(a)$. □

Teorema 2.33. *Sia G un gruppo stratificato semplicemente connesso, e sia K come in 2.11. Allora K soddisfa*

$$K(\lambda, x) = K(1, \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x).$$

In particolare, K è C^∞ in λ e esistono delle costanti C_n tali che

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} K(\lambda, x)\right| \leqslant C_n \lambda^{-n} \left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x| + \lambda^{\frac{n}{2}}|x|^n\right)$$

Dimostrazione. Si ha che, per quasi ogni λ, per il Teorema 1.17,

$$K(\lambda, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])} \check{\mathbb{1}}_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2Cc\varepsilon\lambda^{\frac{D}{2}-1}} \check{\mathbb{1}}_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(x),$$

che, per i Lemmi 2.28 e 2.29, scegliendo $\tau = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, è pari a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2C\varepsilon\lambda^{\frac{D}{2}-1}} \lambda^{\frac{D}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda},1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]}(\lambda^{-1}\cdot)\right)^\vee (\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2C\varepsilon\lambda^{\frac{D}{2}-1}} \frac{\mu\left(\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda}, 1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]\right)}{\mu\left(\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda}, 1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]\right)} \lambda^{\frac{D}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda},1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]}(\lambda^{-1}\cdot)\right)^\vee (\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2C\varepsilon\lambda^{\frac{D}{2}-1}} \frac{\frac{2C\varepsilon}{\lambda}}{\mu\left(\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda}, 1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]\right)} \lambda^{\frac{D}{2}} \left(\mathbb{1}_{\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda},1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]}(\lambda^{-1}\cdot)\right)^\vee (\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(\mathbb{1}_{\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda},1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]}(\lambda^{-1}\cdot)\right)^\vee (\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x)}{\mu\left(\left[1-\frac{\varepsilon}{\lambda}, 1+\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]\right)} =$$

$$K(1, \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x).$$

Per le stime sulle derivate, si noti per prima cosa che, scrivendo $x = \sum_{i=0}^{Q} Y_i$, con $Y_i \in \mathfrak{g}_i$, e procedendo induttivamente,

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} K(\lambda, x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \lambda^{\frac{i_1+\cdots+i_k}{2}-n} \left(Y_{i_k} \cdots Y_{i_1} K\right) \left(1, \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x\right).$$

Inoltre, per il Lemma 2.32 e il Lemma 2.15

$$\left|\left(Y_{i_k} \cdots Y_{i_1} K\right) \left(1, \lambda^{\frac{1}{2}} x\right)\right| \leqslant C_k |x|^{i_1+\cdots+i_k},$$

da cui segue direttamente la stima della tesi. $\square$

Capitolo 3

Esempi

3.1 $\mathbb{R}^n$

Su $\mathbb{R}^n$, lo studio delle proprietà del Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}^2$ si riduce all'analisi di Fourier standard. Infatti vale:

Proposizione 3.1. *La dimensione d in 0 di $\mathbb{R}^n$ è uguale alla dimensione D all'infinito di $\mathbb{R}^n$ e $d = D = n$.*

Dimostrazione. Con la norma euclidea, si ha che $|B(0,r)| = C_n r^n$, per cui è sufficiente dimostrare che la distanza di Carnot-Caratheodory associata ai campi $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ coincide con la distanza euclidea standard su $\mathbb{R}^n$. Per l'invarianza per traslazioni, basta verificarlo su $\mathrm{d}(0,x)$. Sia quindi $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva con $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = x$. Allora

$$d(0,x) = \inf_\gamma \left\{ \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=0}^n \langle e_i, \dot\gamma(t)\rangle} \mathrm{d}t \right\} =$$

$$\inf_\gamma \left\{ \int_0^1 |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t \right\} = \inf_\gamma L(\gamma) = \|x\| \, .$$

□

Teorema 3.2. *Sia $\check f$ definita come in 2.3. Allora per $f \in L^1(\lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda)$ vale la formula*

$$\check f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(|\xi|^2\right) e^{i\langle \xi, x\rangle} \mathrm{d}\xi$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ l'usuale trasformata di Fourier su $\mathbb{R}^n$. Poiché per $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si ha che

$$\mathcal{F}(\Delta\phi)(\xi) = -|\xi^2|\mathcal{F}(\phi)(\xi),$$

si ottiene che, per $f, \phi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}(f(\mathscr{L})\phi)(\xi) = f(|\xi|^2)\mathcal{F}(\phi)(\xi).$$

Di conseguenza,

$$f(\mathscr{L})\phi = \mathcal{F}^{-1}\left(f(|\cdot|^2)\mathcal{F}(\phi)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(f(|\cdot|^2)\right) * \phi,$$

da cui

$$\check{f} = \mathcal{F}^{-1}\left(f(|\cdot|^2)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(|\xi|^2\right) e^{i\langle\xi,\cdot\rangle}\mathrm{d}\xi.$$

Inoltre, poiché per la Proposizione 2.10 la mappa $\check{}$ è continua da L^1 a C_0, esattamente come la mappa $\mathcal{F}^{-1}$, si ha che la formula vale per ogni $f \in L^1$.

□

Corollario 3.3. *La misura μ definita nel Teorema 2.6 è assolutamente continua rispetto a Lebesgue e ha densità*

$$\mathrm{d}\mu = C_n \lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda$$

Dimostrazione. Per l'usuale Teorema di Plancherel su $\mathbb{R}^n$,

$$\|\check{f}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(|\xi|^2)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^+} |f(r^2)|^2 \omega_n r^{n-1}\mathrm{d}r =$$

$$\frac{\omega_n}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \lambda^{\frac{n-1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda = C_n \int_{\mathbb{R}^+} |f(\lambda)|^2 \lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda.$$

□

Corollario 3.4. *Sia $K(\lambda, x)$ definito come nel Teorema 2.11. Allora*

$$K(\lambda, x) = C\frac{J_{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)^{\frac{n}{2}-1}} =: \Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right),$$

dove $J_{\frac{n}{2}-1}$ è la funzione di Bessel di parametro $\frac{n}{2}-1$, e C è tale che $K(0, x) = 1$.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione in $S(\mathbb{R}^+)$. E' noto che, per una certa costante C, per ogni F radiale,

$$(\mathcal{F}F)(re_1) = \frac{C}{r^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^{+\infty} J_{\frac{n}{2}-1}(rs)\, s^{\frac{n}{2}-1}F(se_1)s\mathrm{d}s.$$

Quindi, per $F(\xi) = f(|\xi|^2)$, si ha che $\mathcal{F}f = C\check{f}$, per cui:

$$\check{f}(x) = \frac{C}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{+\infty} J_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|s\right) s^{\frac{n}{2}-1} f(s^2) s \mathrm{d}s =$$

$$\frac{C}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^{+\infty} J_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\lambda^{\frac{1}{2}}\right) \lambda^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} f(\lambda) \mathrm{d}\lambda =$$

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda) C \frac{J_{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)^{\frac{n}{2}-1}} \lambda^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}\lambda,$$

da cui segue la tesi per unicità del nucleo K. □

Si può osservare che in questo caso (essendo $\mathbb{R}^n$ un gruppo stratificato), come in parte preannunciato nell'introduzione, sia la misura μ che il nucleo K sono C^∞ nella variabile λ.

3.2 $\mathbb{R}^n \times K$

In questo paragrafo, K sarà un gruppo compatto, e Δ_K sarà l'operatore di Casimir su K. Riportiamo senza dimostrazione il seguente teorema:

Teorema 3.5. *L'operatore di Casimir Δ_K ha spettro discreto, e $\Delta_K^{-1} : \mathrm{Ker}(\Delta_K)^\perp \to L^2(K)$ è un operatore compatto.*

Questo risultato e altre informazioni sull'operatore di Casimir si possono trovare in [5].
Sul gruppo $\mathbb{R}^n \times K$, consideriamo un operatore della forma $\Delta = \Delta_n + \Delta_K$, con Δ_n il Laplaciano standard su $\mathbb{R}^n$ e Δ_K l'operatore di Casimir. In questo caso si ha che:

Proposizione 3.6. *La dimensione all'infinito di $\mathbb{R}^n \times K$ è n, e la dimensione in 0 di $\mathbb{R}^n \times K$ è $n + \dim K$.*

Dimostrazione. La distanza di Carnot-Caratheodory coincide con la distanza Riemanniana associata una metrica invariante a sinistra, per cui scegliendo (U, ϕ) una carta in un intorno di $(0, e)$ tale che $\mathrm{Exp} \circ \phi = \mathrm{Id}$ e tale che $\overline{U}$ compatto, esistono due costanti c, C per cui vale

$$c \left\|\phi(x) - \phi(y)\right\| \leqslant d(x, y) \leqslant C \left\|\phi(x) - \phi(y)\right\|.$$

Inoltre la misura di Haar coincide con la forma di volume associata alla metrica, per cui per altre costanti c, C,

$$cr^{n+\dim K} \leqslant |B_r| \leqslant Cr^{n+\dim K}$$

per $r \to 0$, da cui la dimensione in 0 del gruppo è $n + \dim K$.
Per $r \to \infty$, invece, poiché K è compatto, ha diametro finito, per cui

$$\|x\| - \operatorname{diam} K \leqslant d((0,e),(x,e)) - d((x,e),(x,y)) \leqslant$$

$$d((0,e),(x,y)) \leqslant$$

$$d((0,e),(x,e)) + d((x,e),(x,y)) \leqslant \|x\| + \operatorname{diam} K,$$

per cui $B_{r-\operatorname{diam} K}(\mathbb{R}^n) \times K \subseteq B_r(\mathbb{R}^n \times K) \subseteq B_r(\mathbb{R}^n) \times K$. Di conseguenza esistono c, C per cui

$$cr^n \leqslant |B_r| \leqslant Cr^n$$

per $r > 2 \operatorname{diam} K$. □

Per studiare le proprietà di Δ in questo caso particolare, è utile usare proprietà di commutatività forte fra Δ_n e Δ_K. Vale il seguente:

Proposizione 3.7. *Gli operatori Δ_n e Δ_K commutano.*

Dimostrazione. Poiché Δ_K ha spettro discreto e ogni autospazio ha dimensione finita, il proiettore ortogonale su un autospazio di Δ_K è dato dalla convoluzione su K per un'autofunzione di Δ_K (indipendente dal punto x di $\mathbb{R}^n$). Per cui è sufficiente verificare che $\forall \psi$ autofunzione di K, $\forall \phi \in C_c^\infty$, $\Delta_n(\phi *_K \psi) = (\Delta_n \phi) *_K \psi$. Infatti si ha che:

$$\Delta_n(\phi *_K \psi)(x,z) = \Delta_n \int_K \phi(x,y)\psi(y^{-1}z)\mathrm{d}y =$$

$$\int_K \Delta_n \phi(x,y)\psi(y^{-1})\mathrm{d}y = (\Delta_n \phi) *_K \psi(x,z).$$

□

Proposizione 3.8. *Sia E la risoluzione dell'identità associata a $\mathscr{L}_n := -\Delta_n$ su $\mathbb{R}^n \times K$, e sia $\tilde{E}$ la risoluzione dell'identità associata a $\mathscr{L}_n$ su $\mathbb{R}^n$. Analogamente, sia P la risoluzione associata a $\mathscr{L}_K := -\Delta_K$ su $\mathbb{R}^n \times K$ e sia $\tilde{P}$ quella su K. Allora per ogni Ω boreliano, $(E(\Omega)\phi)(x,y) = (\tilde{E}(\Omega)\phi(\cdot,y))(x)$ e analogamente $(P(\Omega)\phi)(x,y) = (\tilde{P}(\Omega)\phi(x,\cdot))(y)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi solo per Δ_n, la dimostrazione per Δ_K è analoga. Per unicità della risoluzione dell'identità associata ad un operatore autoaggiunto, è sufficiente dimostrare che per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Delta_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \lambda \mathrm{d}\tilde{E}\lambda\phi(\cdot,y))(x) = (\Delta_n\phi)(x,y).$$

Questo è chiaramente vero (per definizione di $\tilde{E}$) per ogni ϕ che sia C_c^∞ nella variabile x. Ma, analogamente al Teorema 1.5, Δ_n è essenzialmente autoaggiunto su $X := \{f \in L^2 | f(\cdot, y) \in C_c^\infty$ per quasi ogni $y\}$, per cui $\tilde{\mathscr{L}}$ dato da

$$\tilde{\mathscr{L}}\phi(x, y) := \int_{\mathbb{R}^+} \lambda \mathrm{d}\tilde{E}\lambda\phi(\cdot, y))(x)$$

è l'unica estensione autoaggiunta di Δ_n su X, per cui $\tilde{\mathscr{L}} = \Delta_n$. □

Queste due proprietà ci consentono di ricavare informazioni utili sia sulla mappa ˇ che sulla misura μ definita in 2.6. Infatti:

Proposizione 3.9. *Siano $\psi_{\lambda_1}, \ldots, \psi_{\lambda_k}, \ldots$ le autofunzioni di Δ_K tali che $\cdot *_K \psi_{\lambda_k}$ sia la proiezione ortogonale di $L^2(K)$ sull'autospazio relativo a λ_k. Sia Ψ_n come nel Corollario 3.4. Allora*

$$\check{\mathbb{1}}_{[a,b]}(x, y) = C \sum_{\lambda_k \leqslant b} \psi_{\lambda_k}(y) \int_{\max(a-\lambda_k,0)}^{b-\lambda_k} \Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}} x\right) \lambda^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}\lambda$$

Dimostrazione. Per commutatività forte degli operatori, si ha che

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(\mathscr{L}) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{[a,b]}(s+t) \mathrm{d}E_t \mathrm{d}P_s =$$

$$\int_{[0,b]} \int_{[a-s,b-s]} \mathrm{d}E_s \mathrm{d}P_s =$$

$$\int_{[0,b]} E([a-s, b-s]) \mathrm{d}P_s = \sum_{\lambda_k \leqslant b} E([a-\lambda_k, b-\lambda_k]) \psi_{\lambda_k} *_K \cdot.$$

Quindi, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times K)$,

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(\mathscr{L}) = \sum_{\lambda_k \leqslant b} E([a-\lambda_k, b-\lambda_k]) \psi_{\lambda_k} *_K \phi =$$

$$\sum_{\lambda_k \leqslant b} C \int_{\max(a-\lambda_k,0)}^{b-\lambda_k} \Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot\right) \lambda^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}\lambda *_{\mathbb{R}^n} (\psi_{\lambda_k} *_K \phi) =$$

$$\sum_{\lambda_k \leqslant b} C \left(\int_{\max(a-\lambda_k,0)}^{b-\lambda_k} \Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot\right) \lambda^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}\lambda \right) \psi_{\lambda_k}(\cdot) * \psi,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 3.10. *Sia* $\mathrm{d}\mu_n(\lambda) := \lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda$ *e sia* $\mu_K := \sum_{\lambda_k}\delta_{\lambda_k}$. *Allora la misura* μ *definita nel Teorema 2.6 è data da*

$$\mu = C\mu_n *_{\mathbb{R}} \mu_K.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.9, si ha che

$$\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(x,y) = C\sum_{\lambda_k\leqslant b}\psi_{\lambda_k}(y)\int_0^{b-\lambda_k}\frac{J_{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)^{\frac{n}{2}-1}}\lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda.$$

Vale che $\mu([0,b]) = \left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right\|_{L^2}^2$. Ma, poiché gli ψ_{λ_k} sono ortonormali,

$$\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda_k\leqslant b} C\left\|\int_0^{b-\lambda_k}\frac{J_{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}|x|\right)^{\frac{n}{2}-1}}\lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

che, per il Teorema 2.13 e il Corollario 3.4 è pari a

$$\sum_{\lambda_k\leqslant b} C\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b-\lambda_k]}\right\|_{L^2}^2 = \sum_{\lambda_k\leqslant b} C(b-\lambda_k)^{\frac{n}{2}},$$

che è esattamente $C\mu_n * \mu_K([0,b])$. □

Corollario 3.11. *La misura* μ *è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e vale*

$$\mathrm{d}\mu(\lambda) = \sum_{\lambda_k\leqslant\lambda} C(\lambda-\lambda_k)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Corollario 3.12. *Il nucleo* K *definito nel Teorema 2.11 soddisfa la formula*

$$K(\lambda,x,y) = \frac{\left(\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}\psi_{\lambda_k}(y)\Psi_n\left((\lambda-\lambda_k)^{\frac{1}{2}}x\right)(\lambda-\lambda_k)^{\frac{n}{2}-1}\right)}{\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}(\lambda-\lambda_k)^{\frac{n}{2}-1}}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.9, si ha che

$$\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(x,y) = C\sum_{\lambda_k\leqslant b}\psi_{\lambda_k}(y)\int_0^{b-\lambda_k}\Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)\lambda^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda =$$

$$C\sum_{\lambda_k\leqslant b}\psi_{\lambda_k}(y)\int_{\lambda_k}^{b}\Psi_n\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x\right)(\lambda'-\lambda_k)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{d}\lambda'.$$

Inoltre, per il Corollario 3.11,

$$\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(x,y) = C \sum_{\lambda_k \leqslant b} \int_0^b K(\lambda, x, y)(\lambda' - \lambda_k)^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{d}\lambda,$$

per cui, dato che gli intervalli generano la sigma-algebra dei boreliani, la tesi vale per unicità di K. $\square$

In questa situazione, essendo μ_K una misura discreta, è possibile osservare che la misura μ ha regolarità $\frac{n}{2} = \frac{D}{2}$ in λ (almeno per n pari), come parzialmente preannunciato nell'introduzione. Analogamente, il nucleo K a sua volta ha regolarità (debole) $\frac{n}{2} - \varepsilon$ in λ, come si può osservare dalle formule.

3.3 Prodotti diretti

L'esempio $\mathbb{R}^n \times K$ presentato nella sezione precedente, in realtà è un caso particolare di una situazione più generale. In questa sezione, consideriamo un gruppo G che si scriva come prodotto diretto di due gruppi di Lie $H \times K$, di cui almeno H non compatto. Consideriamo un sublaplaciano Δ_H su H e un sublaplaciano Δ_K su K, e mettiamo su G il sublaplaciano $\Delta = \Delta_H + \Delta_K$. Vale la seguente Proposizione:

Proposizione 3.13. *Sia E_s la risoluzione dell'identità associata a $\mathscr{L}_H := -\Delta_H$ su $H \times K$, e sia $\tilde{E}_s$ la risoluzione dell'identità associata a $\mathscr{L}_H$ su K. Analogamente, sia P_t la risoluzione associata a $\mathscr{L}_K := -\Delta_K$ su $H \times K$ e sia $\tilde{P}$ quella su K. Allora per ogni Ω boreliano, $(E(\Omega)\phi)(x,y) = (\tilde{E}(\Omega)\phi(\cdot,y))(x)$ e analogamente $(P(\Omega)\phi)(x,y) = (\tilde{P}(\Omega)\phi(x,\cdot))(y)$.*

Dimostrazione. Come nella sezione precedente, è sufficiente verificare che l'operatore associato alla risoluzione dell'identità

$$(R(\Omega)\phi)(x,y) := (\tilde{E}(\Omega)\phi(\cdot,y))(x)$$

è esattamente $\mathscr{L}_H$. La dimostrazione per $\mathscr{L}_K$ sarà analoga. Per prima cosa, verifichiamo che $\mathscr{L}_H$ è autoaggiunto sul dominio

$$\mathcal{D} = \{\phi \in L^2(H \times K) | \phi(\cdot,y) \in \mathcal{D}(\mathscr{L}_H) \text{ per quasi ogni } y \text{ e } \Delta_H\phi \in L^2(H \times K)\}.$$

E' facile verificare che $\mathscr{L}_H$ è simmetrico su questo dominio. E' anche chiuso: se $\phi_n \to \phi$ e $\mathscr{L}_H\phi_n \to \psi$, allora per quasi ogni y, a meno di sottosuccessioni, $\phi_n(\cdot,y) \to \phi(\cdot,y)$ in $L^2(H)$ e $\mathscr{L}_H\phi_n(\cdot,y) \to \psi(\cdot,y)$, per cui $\mathscr{L}_H\phi(\cdot,y) = \psi(\cdot,y)$, e quindi $\mathscr{L}_H\phi = \psi$.
Sia quindi $\phi \in \mathcal{D}(\mathscr{L}_H^*)$. Per prima cosa, si ha che per ogni $v \in L^2(K)$, $\int_K v(y)\phi(x,y) \in$

$\mathcal{D}(\mathscr{L}_H^*)$. Infatti, per ogni $u \in L^2(H)$ nel dominio di $\mathscr{L}_H$ e per ogni $v \in L^2(K)$, $uv \in \mathcal{D}$ e per definizione di $\mathcal{D}(\mathscr{L}_H^*)$:

$$\left| \int_H (\mathscr{L}u)(x) \left(\int_K v(y)\phi(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right| \leqslant C \left\| uv \right\|_{L^2} = C \left\| u \right\|_{L^2} \left\| v \right\|_{L^2}.$$

In particolare, se v_n è un'identità approssimata, allora $\int_K \phi(x,y)v_n(y^{-1}y_0)\mathrm{d}y$ tende a $\phi(x,y_0)$ in $L^2(H \times K)$, quindi per quasi ogni y_0, a meno di sottosuccessioni, $\int_K \phi(\cdot,y)v_n(y^{-1}y_0)\mathrm{d}y \to \phi(\cdot,y_0)$ in L^2. Analogamente si può dire per $\mathscr{L}_H^*\phi$, per cui $\phi \in \mathcal{D}$ e $\mathscr{L}_H^*\phi = \phi$ per chiusura dell'operatore $\mathscr{L}_H$.
A questo punto, l'identità

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} \lambda(\tilde{E}_\lambda \phi(\cdot,y)) \right)(x) = \left(\mathscr{L}_H \phi(\cdot,y) \right)(x) = \mathscr{L}_H \phi(x,y)$$

vale per ogni $\phi \in \mathcal{D}$, per cui vale la tesi. □

Proposizione 3.14. *Gli operatori $\mathscr{L}_H$ e $\mathscr{L}_K$ commutano.*

Dimostrazione. Chiamiamo p_t^H il nucleo del calore di $\mathscr{L}_H$ e p_t^K il nucleo del calore di $\mathscr{L}_K$. La tesi è equivalente a chiedersi se gli operatori associati $\cdot *_K p_t^K$ e $\cdot *_H p_t^H$ commutino. Questo però è banalmente vero:

$$\left(\phi *_K p_t^K\right) *_H p_t^H(\overline{x},\overline{y}) = \int_H p_t^H(y^{-1}\overline{y}) \int_K \phi(x,y)p_t^K(x^{-1}\overline{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_K p_t^K(x^{-1}\overline{x}) \int_H \phi(x,y)p_t^H(y^{-1}\overline{y})\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left(\phi *_H p_t^H\right) *_K p_t^K(\overline{x},\overline{y}).$$

□

Proposizione 3.15. *Sia $b > 0$. Indichiamo con ${}^{\vee_{H,s}}$ la mappa ${}^\vee$ sul gruppo H nella variabile spettrale s, e con ${}^{\vee_{K,t}}$ la mappa ${}^\vee$ sul gruppo K nella variabile spettrale t. Allora si ha che:*

$$\check{\mathbb{1}}_{[0,b]} = \left(\mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}} \right)^{\vee_{K,t}}$$

Dimostrazione. Sia p_τ^H il nucleo del calore su H e p_τ^K il nucleo del calore su K. Si ha che, poiché $\mathscr{L}_H$ e $\mathscr{L}_K$ commutano,

$$\mathbb{1}_{[0,b]}(\mathscr{L})(p_\tau^H p_\tau^K) = \int_{[0,b]} \int_{[0,b-t]} \mathrm{d}E_s \mathrm{d}P_t p_\tau^H p_\tau^K =$$

per la Proposizione 3.13, questo è

$$\int_{[0,b]} \int_{[0,b-t]} \mathrm{d}\tilde{E}_s p_\tau^H \mathrm{d}\tilde{P}_t p_\tau^K =$$

$$\int_{[0,b]} \mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}} *_H p_\tau \mathrm{d}\tilde{P}_t p_\tau^K =$$

$$\int_{[0,b]} \int_H \mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}(x')p_\tau(x^{-1}x)\mathrm{d}x'\mathrm{d}\tilde{P}_t p_\tau^K =$$

$$\left(\int_H \mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}(x')p_\tau(x^{-1}x)\mathrm{d}x'\right)^{\vee_{K,t}} *_K p_\tau^{\cdot}$$

Facendo tendere $\tau \to 0$, per il Teorema 1.13, p_τ è un'identità approssimata, quindi $\mathbb{1}_{[0,b]}(\mathscr{L})(p_\tau^H p_\tau^K)$ tende a $\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}$, $\int_H \mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}(x')p_\tau(x^{-1}x)\mathrm{d}x'$ e tende puntualmente equilimitata a $\mathbb{1}_{[b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}$, da cui segue la tesi. $\square$

Corollario 3.16. *Come nel Teorema 2.6, sia μ_H la misura associata ad $\mathscr{L}_H$, μ_K la misura associata a $\mathscr{L}_K$, e μ la misura associata a $\mathscr{L}$. Allora μ soddisfa:*

$$\mu = \mu_H * \mu_K.$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right\|^2_{L^2(H\times K)} = \left\|\left\|\check{\mathbb{1}}_{[0,b]}\right\|_{L^2(K)}\right\|^2_{L^2(H)} =$$

$$\left\|\left\|\left(\mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}\right)^{\vee_{K,t}}\right\|_{L^2(K)}\right\|^2_{L^2(H)} =$$

$$\left\|\sqrt{\int_{\mathbb{R}^+} \left|\mathbb{1}_{[0,b-t]}{}^{\vee_H}\right|^2 \mathrm{d}\mu_K(t)}\right\|^2_{L^2(H)} =$$

$$\int_H \int_{\mathbb{R}^+} \left|\mathbb{1}_{[0,b-t]}{}^{\vee_H}(x)\right|^2 \mathrm{d}\mu_K(t)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_H \left|\mathbb{1}_{[0,b-t]}{}^{\vee_H}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\mu_K(t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{[0,b-t]}(s)\mathrm{d}\mu_H(s)\mathrm{d}\mu_K(t) =$$

$$\mu_H * \mu_K([0,b]),$$

da cui segue la tesi. $\square$

Corollario 3.17. *Come nel Teorema 2.11, sia K_K il nucleo associato a $\mathscr{L}_K$, K_H quello associato ad $\mathscr{L}_H$, e K quello associato a $\mathscr{L}$. Allora K è definito dall'uguaglianza di misure*

$$K(\cdot,x,y)\mu = K_K(\cdot,y)\mu_K *_{\mathbb{R}} K_H(\cdot,x)\mu_H.$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.15, si ha che

$$\int_0^b K(\lambda, x)\mathrm{d}\mu(\lambda) = \check{\mathbb{1}}_{[0,b]}(x, y) =$$

$$\left(\mathbb{1}_{[b-t]}(s)^{\vee_{H,s}}\right)^{\vee_{K,t}}(x, y) = \int_0^b K_K(t, y) \int_0^{b-t} K_H(s, x)\mathrm{d}\mu_H(s)\mathrm{d}\mu_K(t) =$$

$$\int_0^b \left(K_K(\cdot, x)\mu_K *_{\mathbb{R}} K_H(\cdot, x)\mu_H\right)(\lambda).$$

□

3.4 Il gruppo dei moti Euclidei e il suo rivestimento universale

Adesso consideriamo una situazione leggermente diversa. Indentifichiamo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e consideriamo le mappe lineari su $\mathbb{C}$ della forma $z \mapsto e^{it}z + a$, con $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$ e $a \in \mathbb{C}$. Scriviamo $(a, t) \cdot z := e^{it}z + a$.

Proposizione 3.18. *Attraverso la composizione, questa famiglia di mappe è un gruppo $G = \mathbb{C} \ltimes \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ col prodotto*

$$(a, t)(b, s) := (a + e^{it}b, t + s)$$

Dimostrazione. Per la legge di prodotto, è sufficiente calcolare la composizione

$$(a, t)(b, s) \cdot z = (a, t) \cdot (e^{is}z + b) = e^{i(s+t)}z + e^{it}b + a.$$

Inoltre, si ha che $(a, t)(-e^{-it}a, -t) = (0, 0)$ e $(0, 0)\cdot z = z$, quindi G è un sottogruppo delle mappe affini. Inoltre il prodotto è continuo su G, quindi è un gruppo di Lie. □

Proposizione 3.19. *L'algebra di Lie di G è generata da X, Y, Z con $X(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Y(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $T(0, 0) = \frac{\partial}{\partial t}$ e*

$$\begin{aligned} [X, Y] &= 0 \\ [X, T] &= Y \\ [Y, T] &= -X \end{aligned}$$

Dimostrazione. Siano $X, Y, T \in \mathfrak{g}$ tali che in $(0, 0)$ siano come sopra. Si ha che

$$[W, Z] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\bigg|_{\tau=0} \exp(\tau W)\exp(\tau Z)\exp(-\tau W)\exp(-\tau Z)$$

per ogni $W, Z \in \mathfrak{g}$. Inoltre, poiché $(\tau, 0)$ è un gruppo ad un parametro con $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau, 0) = X$, si ha che $\exp(\tau X) = (\tau, 0)$. Analogamente, $\exp(\tau Y) = (i\tau, 0)$, $\exp(\tau T) = (0, \tau)$. La tesi dunque segue sviluppando i conti. □

Proposizione 3.20. *Sia Δ_2 il Laplaciano standard su $\mathbb{R}^2$ e sia T la derivata su S^1. Allora $\Delta := \Delta_2 + T^2$ è il laplaciano su G invariante a sinistra dato da $X^2 + Y^2 + T^2$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la tesi separatamente per traslazioni lungo $\mathbb{R}^2$ e traslazioni lungo S^1 (in quanto queste generano il gruppo G). Per quando riguarda le traslazioni lungo S^1,

$$T\phi(L_{0,\tau}(a,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\phi((0,-\tau)(a,t)) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(e^{-i\tau}a, t-\tau) = L_{(0,\tau)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(a,t).$$

e per Δ_2:

$$\Delta_2\phi(L_{(0,\tau)}(a,t)) = \Delta_2\phi(e^{-i\tau}a, t-\tau) =$$

$$(\Delta_2\phi)(e^{-i\tau}a, t-\tau) = L_{(0,\tau)}\phi(a,t)$$

In quanto Δ_2 commuta con le rotazioni su $\mathbb{R}^2$. Per quando riguarda le traslazioni lungo $\mathbb{R}^2$:

$$T\phi(L_{(w,0)}(a,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(a+w,t) = L_{(w,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)(a,t)$$

$$\Delta_2\phi(L_{(w,0)}(a,t)) = \Delta_2\phi(w+a,t) = \left(L_{(w,0)}\Delta_2\phi\right)(a,t)$$

□

Dato che questo particolare sublaplaciano coincide con il laplaciano standard su $\mathbb{R}^2 \times S^1$, si possono ricavare buone proprietà della misura μ definita in 2.6 a partire dalle proprietà del laplaciano standard su $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Infatti:

Proposizione 3.21. *Sia μ la misura definita come in 2.6. Allora μ è assolutamente continua rispetto a Lebesgue e $\mathrm{d}\mu(\lambda) = C\left\lceil\sqrt{\lambda}\right\rceil\mathrm{d}\lambda$.*

Dimostrazione. Considero il gruppo $\mathbb{R}^2 \times S^1$, e su questo considero il Laplaciano $\tilde{\Delta} = \Delta_2 + T^2$. Poiché la misura di Haar su G è uguale alla misura di Haar su $\mathbb{R}^2 \times S^1$ e $\tilde{\Delta} = \Delta$, allora $f(\mathscr{L}) = f(\tilde{\mathscr{L}})$ per ogni f boreliana. Inoltre, si ha che, per Corollario 3.11,

$$\left\|\check{f}\right\|_{L^2} = \|f(\mathscr{L})\|_{L^1\to L^2} = \left\|\tilde{f}(\mathscr{L})\right\|_{L^1\to L^2} = \int_{\mathbb{R}^+}|f(\lambda)|^2 C\left\lceil\sqrt{\lambda}\right\rceil\mathrm{d}\lambda,$$

da cui segue la tesi. □

Analogamente, si possono ricavare delle formule sul nucleo K del Teorema 2.11 a partire dal nucleo $\tilde{K}$ associato al laplaciano standard su $\mathbb{R}^2 \times S^1$:

Proposizione 3.22. *Sia K come nel Teorema 2.11, e sia Ψ_2 come nel Corollario 3.4. Allora*

$$K(\lambda, a, t) = \frac{\sum_{n \leqslant \sqrt{\lambda}} \cos(nt) \Psi_2 \left(\sqrt{(\lambda - n)} a \right)}{\lceil \sqrt{\lambda} \rceil},$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{K}$ il nucleo associato all'operatore $\tilde{\Delta}$ su $H := \mathbb{R}^2 \times S^1$. Sia $f^{\vee_H}$ il nucleo di convoluzione associato a $f(\tilde{\mathscr{L}})$ su H. Allora, come nella Proposizione 3.21, si ha che $f(\tilde{\mathscr{L}})\phi(0,0) = f(\mathscr{L})\phi(0,0)$, quindi deve valere, per ogni $f \in L^1(\mu)$ e per ogni $\phi \in L^1(G)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^+} \phi(a,t) f(\lambda) \tilde{K}(\lambda, -a, -t) \mathrm{d}\mu(\lambda) \mathrm{d}t \mathrm{d}a =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}^+} \phi(a,t) f(\lambda) K(\lambda, -e^{-it} a, -t) \mathrm{d}\mu(\lambda) \mathrm{d}t \mathrm{d}a,$$

per cui la tesi segue dal Corollario 3.11 □

Considerazioni del tutto analoghe valgono per il rivestimento universale $\overline{G} \cong \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ di G, con la legge di prodotto definita da

$$(a,t)(b,s) = (e^{it} b + a, t + s).$$

Vale infatti la seguente Proposizione:

Proposizione 3.23. *Sia Δ il Laplaciano standard su $\mathbb{R}^3$. Allora Δ è un operatore invariante a sinistra su $\overline{G}$ e $\Delta = X^2 + Y^2 + T^2$.*

Dimostrazione. Procedendo come per G, si ha che $\Delta = \Delta_2 + T^2$ e

$$T\phi(L_{0,\tau}(a,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \phi((0, -\tau)(a,t)) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(e^{-i\tau} a, t - \tau) = L_{(0,\tau)} \frac{\partial}{\partial t} \phi(a,t),$$

$$\Delta_2 \phi(L_{(0,\tau)}(a,t)) = \Delta_2 \phi(e^{-i\tau} a, t - \tau) =$$

$$(\Delta_2 \phi)(e^{-i\tau} a, t - \tau) = L_{(0,\tau)} \phi(a,t)$$

per quanto riguarda le traslazioni nella seconda variabile. Per le traslazioni nella prima variabile, invece:

$$T\phi(L_{(w,0)}(a,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(a + w, t) = L_{(w,0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi \right) (a,t)$$

$$\Delta_2\phi(L_{(w,0)}(a,t)) = \Delta_2\phi(w+a,t) = \left(L_{(w,0)}\Delta_2\phi\right)(a,t),$$

da cui segue la tesi. □

Come nel caso di G, avere un'altro gruppo $H := \mathbb{R}^3$ diffeomorfo a $\overline{G}$, con la stessa misura di Haar e con lo stesso sublaplaciano, consente di ricavare facilmente delle formule per la misura μ definita in 2.6 e il nucleo K definito in 2.11. In particolare:

Proposizione 3.24. *La misura μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e esiste una costante C per cui*

$$\mathrm{d}\mu(\lambda) = C\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda.$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{\Delta}$ il Laplaciano standard su $\mathbb{R}^3$. Allora $f(\mathscr{L}) = f(\tilde{\mathscr{L}})$ per ogni f boreliana e quindi, per il Corollario 3.3,

$$\|\check{f}\|_{L^2} = \|f(\mathscr{L})\|_{L^1\to L^2} = \left\|\tilde{f}(\mathscr{L})\right\|_{L^1\to L^2} = \int_{\mathbb{R}^+} |f(\lambda)|^2 C\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda,$$

da cui $\mathrm{d}\mu(\lambda) = C\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda$. □

Proposizione 3.25. *Sia K come nel Teorema 2.11, e sia Ψ_3 come nel Corollario 3.4. Allora K soddisfa:*

$$K(\lambda, x) = \Psi_3(\lambda^{\frac{1}{2}}x),$$

Dimostrazione. Analogamente al caso per G, chiamando $\tilde{K}$ il nucleo K per $\mathbb{R}^3$, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^+} \phi(a,t)f(\lambda)\tilde{K}(\lambda,-a,-t)\mathrm{d}\mu(\lambda)\mathrm{d}t\mathrm{d}a =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{S^1}\int_{\mathbb{R}^+} \phi(a,t)f(\lambda)K(\lambda,-e^{-it}a,-t)\mathrm{d}\mu(\lambda)\mathrm{d}t\mathrm{d}a,$$

per cui segue dal Corollario 3.4 . □

In questi casi (G e $\overline{G}$), rispettivamente, la regolarità di μ e di K è pari a $\frac{D}{2}$ e ∞, quindi anche per questi due gruppi si ottengono risultati sulla regolarità in λ molto migliori di quanto visto nella Sezione 2.1.

3.5 Il gruppo di Heisenberg

Consideriamo adesso un esempio di un caso nilpotente.

Definizione 3.26. *Il* gruppo di Heisenberg *è il gruppo* $\mathbb{H}$ *diffeomorfo a* $\mathbb{R}^3$ *con l'operazione di gruppo data da*

$$(x, y, t)(x', y', t') = \left(x + x', y + y', t + t' - \frac{1}{2}(xy' + x'y)\right).$$

Inoltre, identificando $\mathbb{R}^3$ *con* $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$*, si può scrivere il prodotto come*

$$(z, t)(z', t') = \left(z + z', t + t' - \frac{1}{2}\Im(z\overline{z'})\right)$$

E' abbastanza facile verificare che con questa definizione, $\mathbb{H}$ è effettivamente un gruppo di Lie con elemento neutro $(0, 0)$. Inoltre, vale il seguente:

Proposizione 3.27. *L'algebra di Lie di* $\mathbb{H}$ *è generata da* X, Y, T*, con*

$$\begin{array}{rcl} X(0,0) & = & \frac{\partial}{\partial x} \\ Y(0,0) & = & \frac{\partial}{\partial y} \\ T(0,0) & = & \frac{\partial}{\partial t} \\ [X,Y] & = & T \\ [X,T] & = & 0 \\ [Y,T] & = & 0 \end{array}$$

Inoltre, con la famiglia di dilatazioni $\delta_\lambda(z, t) := (\lambda z, \lambda^2 t)$*,* $\mathbb{H}$ *diventa un gruppo stratificato con* $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Span}(X, Y)$ *e* $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{Span}\, T$*.*

Dimostrazione. Usando la formula

$$[W, Z] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\bigg|_{\tau=0} \exp(\tau W)\exp(\tau Z)\exp(-\tau W)\exp(-\tau Z).$$

Notando che $(\tau, 0)$, $(i\tau, 0)$ e $(0, \tau)$ sono i tre gruppi ad un parametro generati rispettivamente da X, Y, Z. Si ha che:

$$(\tau, 0)(i\tau, 0)(-\tau, 0)(-i\tau, 0) = (0, \tau^2),$$

da cui $[X, Y] = T$. Inoltre, $(0, \tau)$ è nel centro di G:

$$(z, t)(0, \tau) = (z, t + \tau) = (0, \tau)(z, t),$$

per cui T è nel centro di $\mathfrak{g}$, e quindi $[X, T] = [Y, T] = 0$.

□

Proposizione 3.28. *Si ha che* $X(z, t) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial t}$*,* $Y(z, t) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial t}$ *e* $T(z, t) = \frac{\partial}{\partial t}$*.*

Dimostrazione.

1.
$$Xf(z,t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f((z,t)(\tau,0)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f\left(z+\tau, t-\frac{1}{2}(\Im z)\tau\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}f(z,t) - \frac{1}{2}\Im(z)\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y,t) - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t).$$

2.
$$Yf(z,t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f((z,t)(i\tau,0)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f\left(z+i\tau, t+\frac{1}{2}(\Re z)\tau\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(z,t) + \frac{1}{2}\Re(z)\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,t) + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t).$$

3.
$$T(z,t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f((z,t)(0,\tau)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} f((z,t+\tau)) =$$
$$\frac{\partial}{\partial t}f(z,t).$$

□

Per prima cosa, consideriamo su $\mathbb{H}$ il sublaplaciano dato da $\Delta := X^2 + Y^2 = \Delta_2 + r\partial_\theta\partial_t + \frac{r^2}{4}\partial_t^2$ (in coordinate polari su $\mathbb{R}^2$ nel piano x, y). Vale la seguente:

Proposizione 3.29. *Sia $\mathcal{F}_t$ la trasformata di Fourier nella variabile t. Allora*
$$\left(\mathcal{F}_t\Delta\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) = \left((X_\xi^2 + Y_\xi^2)\phi(\cdot,\xi)\right)(z),$$
con $X_\xi = \partial_x - \frac{i}{2}y\xi$, $Y_\xi = \partial_y + \frac{i}{2}x\xi$.

Dimostrazione. Si ha che
$$\left(\mathcal{F}_tX\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) = \left(\mathcal{F}_t\partial_x - \frac{1}{2}\partial_t\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) =$$
$$\left(\mathcal{F}_t\partial_x\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) - \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_t\partial_t\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) =$$
$$\left(\partial_x\phi\right)(z,\xi) - \frac{1}{2}i\xi\phi(z,\xi),$$
e analogamente
$$\left(\mathcal{F}_tY\mathcal{F}_t^{-1}\phi\right)(z,\xi) = \partial_y\phi(z,\xi) + \frac{i}{2}\xi\phi(z,\xi),$$
da cui segue la tesi. □

Per ricavare informazioni spettrali sull'operatore Δ, cerchiamo per prima cosa di ricavarne sugli operatori $X_\xi^2 + Y_\xi^2$, al variare di $\xi \in \mathbb{R}$. Attraverso un semplice calcolo, si ottiene il seguente Lemma:

Lemma 3.30. *Siano* $\mathcal{Z}_\xi = \frac{1}{2}(X_\xi - iY_\xi) = \partial_z + \frac{\overline{z}\xi}{4}$ *e* $\overline{\mathcal{Z}}_\xi = \partial_{\overline{z}} - \frac{z\xi}{4}$. *Allora*

$$\mathcal{Z}_\xi f = e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}} \partial_z \left(e^{\frac{\xi|z|^2}{4}} f \right),$$

e analogamente

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi f = e^{\frac{\xi|z|^2}{4}} \partial_{\overline{z}} \left(e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}} f \right).$$

Di conseguenza, si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} f = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f = e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}} g, \text{ con } g \text{ antiolomorfa,} \\ \overline{Z} f = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f = e^{\frac{\xi|z|^2}{4}} g, \text{ con } g \text{ olomorfa.} \end{aligned}$$

per cui per $\xi > 0$, $\overline{Z}$ è iniettivo su $L^2(\mathbb{C})$ e, al contrario, $\mathcal{Z}$ ha un nucleo. La situazione si inverte per $\xi < 0$. Per $j, k \in \mathbb{N}$, definiamo

$$\begin{aligned} h^\xi_{j,0} &= \overline{z}^j e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}}, \\ h^\xi_{j,k} &= \overline{\mathcal{Z}}^k h^\xi_{j,0}(z). \end{aligned}$$

per $\xi > 0$ e

$$\begin{aligned} h^\xi_{j,0} &= z^j e^{\frac{\xi|z|^2}{4}}, \\ h^\xi_{j,k} &= \mathcal{Z}^k h^\xi_{j,0}(z). \end{aligned}$$

per $\xi < 0$.

Proposizione 3.31. *Le funzioni* $h^\xi_{j,k}$ *al variare di* $j, k \in \mathbb{N}$, *a meno di rinormalizzazione, sono una base di Hilbert di* $L^2(\mathbb{C})$, *e*

$$(X_\xi^2 + Y_\xi^2) h_{j,k} = -(2k+1)|\xi| h^\xi_{j,k}$$

Dimostrazione. Siccome ξ non cambierà nel corso della dimostrazione, lo omettiamo, e per semplicità svolgiamo la dimostrazione solo per $\xi > 0$ (per $\xi < 0$ sarà del tutto analoga).
Per prima cosa, notiamo che

$$[X_\xi, Y_\xi] = i\xi.$$

Di conseguenza, dato che

$$\overline{Z} Z f = \frac{1}{4}(X_\xi + iY_\xi)(X_\xi - iY_\xi) = \frac{1}{4}(X_\xi^2 + Y_\xi^2 - i\,[X_\xi, Y_\xi]),$$

si ottiene che

$$X_\xi^2 + Y_\xi^2 = 4\overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z} - \xi I,$$

e, con un conto analogo,

$$X_\xi^2 + Y_\xi^2 = 4\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}} + \xi I.$$

Di conseguenza,

$$\begin{gathered}(X_\xi^2 + Y_\xi^2)h_{j,k} = (4\overline{\mathcal{Z}}\mathcal{Z} - \xi I)\overline{Z}h_{j,k-1} = \\ \overline{Z}(4\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}} - \xi I)h_{j,k-1} = \\ \overline{Z}(X_\xi^2 + Y_\xi^2 - 2\xi I)h_{j,k-1}.\end{gathered}$$

per cui, per induzione, $(X_\xi^2 + Y_\xi^2)h_{j,k} = -(2k+1)\xi h_{j,k}$.
Sempre per induzione, si può anche dedurre che $h_{j,k} = p_{j,k}(z,\overline{z})e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}}$, per cui $h_{j,k} \in L^2(\mathbb{C})$. Di conseguenza, se $k \neq k'$,

$$\langle h_{j,k}, h_{j',k'}\rangle = 0.$$

Per $k = 0$, succede che

$$\begin{gathered}\langle h_{j,0}, h_{j',0}\rangle = \int_{\mathbb{C}} \overline{z}^j z^{j'} e^{-\frac{\xi|z|^2}{2}} = \\ \int_0^\infty r^{j+j'+1} e^{-\frac{\xi r^2}{2}} \int_0^{2\pi} e^{i(j-j')\theta} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r,\end{gathered}$$

per cui $\langle h_{j,0}, h_{j',0}\rangle = 0$ per $j \neq j'$. Inoltre,

$$\begin{gathered}\langle h_{j,k}, h_{j',k}\rangle = \left\langle \overline{\mathcal{Z}}h_{j,k-1}, \overline{Z}h_{j',k-1}\right\rangle = \\ \left\langle h_{j,k-1}, \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}h_{j',k-1}\right\rangle = \left\langle h_{j,k-1}, -\frac{k}{2}h_{j',k-1}\right\rangle = \\ -\frac{k+1}{2}\langle h_{j,k-1}, h_{j',k-1}\rangle,\end{gathered}$$

per cui per induzione segue che $h_{j,k}$ è ortogonale a $h_{j',k}$ se $j \neq j'$.
Infine, per quanto riguarda la densità di $\mathrm{Span}(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$, basta dimostrare che per ogni polinomio $Q(z.\overline{z})$, $Q(z,\overline{z})e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}} \in \mathrm{Span}(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$. Per fare questo, procedendo induttivamente, si noti che

$$h_{j,k} = e^{\frac{\xi|z|^2}{4}} \partial_{\overline{z}} \left(\overline{z}^j e^{-\frac{\xi|z|^2}{2}}\right)$$

è della forma

$$h_{j,k} = P_{j,k}(z,\overline{z})e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}},$$

con $P_{j,k}$ di grado $j+k$ e con l'unico termine di grado $j+k$ pari a $C_{j,k}\overline{z}^j z^k$. Di conseguenza, essendo i $\overline{z}^j z^k$ una base dei polinomi, si ha che per ogni polinomio $Q(z,\overline{z})$, $Q(z,\overline{z})e^{-\frac{\xi|z|^2}{4}} \in \mathrm{Span}(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$, per cui $\mathrm{Span}(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ è denso in L^2. $\square$

Proposizione 3.32. *Siano $\eta_{j,k}$ le funzioni $h^1_{j,k}$ di 3.31 normalizzate in $L^2(\mathbb{C})$. Allora una base di Hilbert di $V_k^\xi := \{f \in L^2(\mathbb{C}) | \Delta_\xi f = -(2k+1)f\}$ è data da $\left(\sqrt{\xi}\eta_{j,k}(\sqrt{\xi}\cdot)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ per $\xi > 0$ e $\left(\sqrt{|\xi|}\eta_{j,k}(\sqrt{|\xi|}\bar{\cdot})\right)_{j\in\mathbb{N}}$ per $\xi < 0$*

Dimostrazione. Poiché $\eta_{j,k}$ è una base di Hilbert di V_k^1 e le funzioni $\sqrt{\xi}\eta_{j,k}(\sqrt{\xi}\cdot)$ e $\sqrt{|\xi|}\eta_{j,k}(\sqrt{|\xi|}\bar{\cdot})$ sono normalizziate in $L^2(\mathbb{C})$, è sufficiente dimostrare che $f \in V_k^1 \iff f(\sqrt{\xi}\cdot) \in V_k^\xi$ per $\xi > 0$ e $f \in V_k^1 \iff f(\sqrt{|\xi|}\bar{\cdot}) \in V_k^\xi$ per $\xi < 0$. Questo a sua volta segue direttamente da:

- Per $\xi > 0$, $X_\xi f(\xi^{\frac{1}{2}}\cdot) = \xi^{\frac{1}{2}}(X_1 f)(\xi^{\frac{1}{2}}\cdot)$ e analogamente per Y_ξ,
- per $\xi < 0$, $X_\xi f(\bar{\cdot}) = X_{-\xi} f(\bar{\cdot})$ e $Y_\xi f(\bar{\cdot}) = -Y_{-\xi} f(\bar{\cdot})$, per cui ci si riconduce al caso $\xi > 0$.

□

Proposizione 3.33. *Sia E^ξ la risoluzione dell'identità associata a Δ_ξ su $L^2(\mathbb{C})$. Allora la risoluzione dell'identità associata a Δ su G è data da*

$$(E(\Omega)\psi)(z,t) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} E^\xi(\Omega)\mathcal{F}_t\psi(\cdot_z, \xi)\mathrm{d}\xi\right)(z,t)$$

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che l'operatore Δ è dato da

$$\Delta = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} \lambda e^{i\cdot t\xi}\mathrm{d}E^\xi(\lambda)\mathcal{F}_t\psi\mathrm{d}\xi.$$

Poiché Δ è essenzialmente autoaggiunto sulle funzioni C_c^∞, è sufficiente dimostrare l'uguaglianza per $\psi \in C_c^\infty$. Si ha che, per la Proposizione 3.29:

$$\Delta\psi(z,t) = \mathcal{F}_t^{-1}(\mathcal{F}_t\Delta\psi)(z,t) = \mathcal{F}_t^{-1}\Delta_\xi\mathcal{F}_t\psi(z,t) =$$

$$\int_{\mathbb{R}}(\Delta_\xi\mathcal{F}_t\psi)e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} e^{it\xi}\lambda\mathrm{d}E^\xi(\lambda)(\mathcal{F}_t\psi)\mathrm{d}\xi$$

□

Lavorando ulteriormente con questa decomposizione, si ottiene che

Proposizione 3.34. *Se K e μ sono rispettivamente come in 2.11 e 2.6, si ha che*

1. *μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e $\mathrm{d}\mu(\lambda) = \lambda\mathrm{d}\lambda$,*

2. *Siano L_k i polinomi di Laguerre, e siano*

$$\psi_{k,\varepsilon}(\lambda, z, t) = \frac{(2\pi)^2}{(2k+1)^2} e^{-\frac{i\varepsilon\lambda t}{2k+1}} e^{-\frac{\lambda|z|^2}{4(2k+1)}} L_k\left(\frac{\lambda|z|^2}{2(2k+1)}\right).$$

   Allora

$$K(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\varepsilon=1,-1} \psi_{k,\varepsilon}(\lambda, z, t).$$

Dimostrazione.

1. Segue direttamente dal Teorema 2.31.

2. E' essenzialmente (1.1) di [9].

□

Infine, anche in questo ultimo esempio, si ottiene che sia la misura μ che il nucleo K sono infinitamente differenziabili in λ (coerentemente con quanto visto nella Sezione 2).

Appendice A

Il Teorema Spettrale

In questa sezione H sarà uno spazio di Hilbert complesso e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sarà la sua forma Hermitiana.

Definizione A.1. *Indichiamo con* operatore *su H una mappa $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ lineare tale che $\mathcal{D}(T) \subseteq H$ e $R(T) \subseteq H$.*

Definizione A.2. *Siano T, S due operatori su H. Allora indichiamo $S \subseteq T$ se $\Gamma(S) \subseteq \Gamma(T)$.*

Definizione A.3. *Diciamo che un operatore T su H è* chiuso *se il suo grafico $\Gamma(T) \subset H \times H$ è chiuso in $H \times H$, e T è chiedibile se $\overline{\Gamma(T)}$ è un grafico di un operatore chiuso. In questo caso, indichiamo con $\overline{T}$ questo operatore.*

Definizione A.4. *Se T è un operatore su $\mathcal{H}$ con $\mathcal{D}(T)$ denso in H, l'*aggiunto *di T è l'unico operatore T^* tale che:*

$$\mathcal{D}(T^*) = \{x \in \mathcal{H} | \exists C > 0 \text{ per cui } \langle x, Ty \rangle \leqslant C \|y\| \, \forall y \in \mathcal{D}(T)\}$$

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Il motivo principale per cui si chiede agli operatori di essere chiudibili è la seguente Proposizione:

Proposizione A.5. *Sia T un operatore con $\mathcal{D}(T)$ denso, $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ l'operatore $V(x, y) = (-y, x)$. Vale che:*

(i) $\Gamma(T^*) = V(\Gamma(T))^{\perp}$, *per cui T^* è un operatore chiuso,*

(ii) T è chiudibile se e solo se T^* ha dominio denso,

(iii) Se T è chiudibile, $\overline{T} = T^{**}$.

Definizione A.6. *Un operatore T si dice* simmetrico *se ha dominio denso e $T \subseteq T^*$.*
Un operatore T si dice autoaggiunto *se T ha dominio denso e $T^* = T$ (da cui segue che T è chiuso).*
Un operatore T si dice essenzialmente autoaggiunto *se è chiudibile e $\overline{T}$ è autoaggiunto.*

Proposizione A.7. *Se T è* positivo *(cioè per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$) , allora T è simmetrico.*

Proposizione A.8. *Sia T un operatore positivo. Allora T è essenzialmente autoaggiunto se e solo se $T + I$ ha immagine densa.*

Definizione A.9 (Risoluzione dell'identità)**.** *Una risoluzione dell'identità su $\mathbb{C}^n$ è una funzione d'insieme $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathscr{L}(H)$ (gli operatori lineari continui da H in sé) tale che:*

(i) $E(\varnothing) = 0$, $E(\mathbb{C}^n c) = I$;

(ii) $\forall \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, $E(\Omega)^* = E(\Omega)$, $E(\Omega)^2 = E(\Omega)$ *($E(\Omega)$ è un proiettore ortogonale);*

(iii) *Se Ω, Ω' boreliani, allora $E_{\Omega\cap\Omega'} = E_\Omega E_{\Omega'}$.*

(iv) *Se $\Omega_n \uparrow \Omega$, allora $E(\Omega_n) \to E(\Omega)$ in topologia forte.*

Proposizione A.10. *Siano $x, y \in H$, e sia $\mu_{x,y}(\Omega) := \langle E(\Omega)x, y\rangle$. Allora $\mu_{x,y}$ è una misura boreliana su $\mathbb{C}^n$ e $\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$. Inoltre, $\mu_{x,x}$ è una misura positiva con $\|\mu_{x,x}\| = \|x\|^2$.*

Proposizione A.11. *Sia $f : \mathbb{C}^n \to C$ una funzione boreliana, e sia E una risoluzione dell'identità su $\mathbb{C}^n$. Sia*

$$\mathcal{D}(f) := \left\{ x \in H \,\middle|\, \int |f|^2 \mathrm{d}\mu_{x,x} < +\infty \right\}.$$

Allora esiste un'unico operatore lineare $f(E) : \mathcal{D}(f) \to H$ tale che

$$\langle f(E)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \mathrm{d}\mu_{x,y} \text{ per ogni } x \in \mathcal{D}(f).$$

Inoltre:

(i) *$\mathcal{D}(f)$ è denso in H,*

(*ii*) *se* $|f(\lambda)| \leqslant C$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$, *allora* $f(E) : H \to H$ *è continua e* $\|f(E)\| \leqslant C$,

(*iii*) $f(E)^* = \overline{f}(E)$,

(*iv*) $\mu_{f(E)x,g(E)y} = f\overline{g}\mu_{x,y}$,

(*v*) $f(E)g(E) \subseteq fg(E)$ *e* $\mathcal{D}(f(E)g(E)) = \mathcal{D}(fg) \cap \mathcal{D}(g)$,

(*vi*) *Se* $f_n \to f$ *puntualmente e le* f_n *sono equilimitate, allora* $f_n(E) \to f(E)$ *in topologia forte.*

Indichiamo anche

$$f(E) = \int f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda, \qquad \langle f(E)x, y\rangle = \int f(\lambda)\mathrm{d}\langle E_\lambda x, y\rangle .$$

Teorema A.12 (Teorema Spettrale)**.** *Sia* $T : \mathcal{D}(T) \to H$ *un operatore autoaggiunto. Allora esiste un'unica risoluzione dell'identità* E *su* $\mathbb{R}$ *tale che*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

Inoltre, E *è concentrata sullo spettro di* T *e* $E(\Omega)$ *commuta con tutti gli operatori limitati che commutano con* T. *Indichiamo*

$$f(T) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

Proposizione A.13. *Sia* $F : H \to K$ *un operatore unitario fra spazi di Hilbert, e sia* $T : \mathcal{D}(T) \to H$ *un operatore autoaggiunto. Allora*

$$Ff(T)F^{-1} = f(FTF^{-1})$$

per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *boreliana.*

Teorema A.14. *Siano* P, Q *risoluzioni dell'identità sui* $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ *rispettivamente, tali che per ogni* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m)$, $P(A)$ *e* $Q(B)$ *commutano. Allora esiste un'unica risoluzione dell'identità* $P \otimes Q$ *tale che per ogni* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m)$, $P \otimes Q(A \times B) = P(A)Q(B)$.

Teorema A.15. *Siano* S, T *due operatori autoaggiunti su* H, *e siano* E^S, E^T *le risoluzioni dell'identità su* $\mathbb{R}$ *determinate dal Teorema Spettrale. Si supponga che per ogni* $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}$ *boreliani,* $P^T(\Omega)$ *e* $P^S(\Omega)$ *commutino. Allora si ha che*

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 \mathrm{d}P^S \otimes \mathrm{d}P^T(\lambda_1, \lambda_2), \\ S &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_2 \mathrm{d}P^S \otimes \mathrm{d}P^T(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Georges Alexopoulos. Spectral multipliers on lie groups of polynomial growth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3):973–979, 1994.

[2] Michael Christ. L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 328(1):73–81, 1991.

[3] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Springer, 1996.

[4] Yves Guivarc'h. Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 101:333–379, 1973.

[5] Sigurdur Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces.* Mathematical Surveys and Monographs 39. American Mathematical Society.

[6] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119(1):147–171, 1967.

[7] Richard Melrose. Propagation for the wave group of a positive subelliptic second-order differential operator. pages 181–192, 1986.

[8] Adam Sikora. On the $L^2 \to L^\infty$ norms of spectral multipliers of "quasi-homogeneous" operators on homogeneous groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(9):3743–3755, 1999.

[9] Robert S Strichartz. L^p harmonic analysis and radon transforms on the heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 96(2):350–406, 1991.

[10] Nicholas T Varopoulos, Laurent Saloff-Coste, and Thierry Coulhon. *Analysis and geometry on groups.* Cambridge university press, 2008.